数学分析中的重要定理

杨艳萍　明清河　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 提 要

本书是为学习数学分析课程的学生、从事数学分析教学与研究的读者而编写的。全书共分七章，系统地把数学分析中的重要定理总结和归纳为微积分基本定理、微分中值定理、积分中值定理、积分关系定理、极限关系定理、闭区间上连续函数的性质定理、实数连续性（完备性）定理七类进行研究。

全书从定理的历史演变分析、定理的内容与证明分析、定理的几何意义与条件结论分析、定理间的相互关系分析、定理的应用分析、定理的推广分析等角度展开研究。

本书可供数学及相关专业的本科生、研究生和从事数学分析的教学研究人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析中的重要定理/杨艳萍，明清河著. —北京：电子工业出版社，2015.2

ISBN 978-7-121-25562-5

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①杨…　②明…　Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教材　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 033543 号

策划编辑：赵玉山
责任编辑：赵玉山
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：22.25　字数：487 千字
版　　次：2015 年 2 月第 1 版
印　　次：2015 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：49.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序　　言

“数学分析”是高等院校数学类各专业的主干课程之一，它是进一步学习各有关后续课程的阶梯，这门课程经过近三个世纪的发展和完善，形成了一套严密的、抽象的、形式化和逻辑性很强的理论体系。其中定理是数学分析理论体系中的重要内容，作为每一位从事数学分析教学和研究的人员，都面临着“教师如何教定理？学生如何学定理？”的问题。

杨艳萍、明清河同志所著的《数学分析中的重要定理》，把数学分析中的重要定理进行了总结、归纳与研究。该书将数学分析中的重要定理分成微积分基本定理、微分中值定理、积分中值定理、积分关系定理、极限关系定理、闭区间上连续函数的性质定理、实数连续性（完备性）定理七类。从数学史的角度认真梳理了这些定理的历史演变，从数学方法论的角度系统总结了这些定理的证明方法，从数学教学论的角度详细分析了定理的几何意义、定理的条件与结论、定理间的相互关系、定理的应用范畴，从数学研究的角度系统归纳了定理的推广方法。

本书是著者在认真学习国内外数学科学方法论的基础上，结合自己多年的数学分析课程教学和科学研究的实践，参阅大量的文献及参考书，经过反复推敲、修改和筛选，经过长时间探讨的成果。是对数学分析中的重要定理进行系统研究的一本难得的好书，也为数学分析定理的研究提供了一个很好的体例。它不仅适用于数学分析的教学研究人员和理工科专业的学生，而且对从事数学史、数学分析教学、数学分析研究来说都有很好的参考价值。

王梓坤

（中国科学院院士、北京师范大学原校长）

前　言

“数学分析”作为数学类各专业的基础与主干课程，其理论体系的严密性与逻辑性很强，其中定理是数学分析理论体系中的重要内容。定理的历史演变、内容与证明、现实意义、相互关系、应用与推广，值得每一位教学研究人员和学习者深入研究和探讨。

笔者在多年的数学分析教学与研究实践中，一直关注着上述问题，积累了许多相关的资料，并进行了深入的思考，逐渐理清了数学分析定理研究的大致框架和基本思路。首先，对前人大量的研究成果进行了认真的归纳、整理、分析，对研究、认知、教学、学习等过程开展了认真的挖掘、分析、实践；然后，对数学分析中的重要定理进行了分类，力求全面化、系统性、思辨性，使其既符合科学研究过程的一般规律，又符合教学认知过程的一般规律。

按照这样的思路，本书把数学分析中的重要定理总结和归纳为微积分基本定理、微分中值定理、积分中值定理、积分关系定理、极限关系定理、闭区间上连续函数的性质定理、实数连续性（完备性）定理七类。对每类定理从定理的历史演变、定理的证明方法、定理的相关内容分析（包含定理的几何现实意义、定理的条件与结论、定理间的相互关系等）、定理的应用范畴、定理的推广方法五个侧面展开细致的研究。本书是基于数学方法论、数学教学论、数学研究的基本方法等理论依据编写的。

书中对定理的历史演变分析，力求体现历史发展的原本过程；对定理的证明方法，力求体现多样化；对定理的相关内容分析，力求密切联系教学实际；对定理的应用范畴，力求体现典型、丰富；对定理的推广方法，力求体现启发性与研究性。书中题量较大、题型丰富，参考文献详细，不仅可作为教学研究的辅导材料，也可作为数学分析的学习指南和复习考研的参考书。

最后，衷心感谢电子工业出版社赵玉山老师和相关编辑人员的辛勤工作，感谢我们的两个研究生吕海玲、于金倩老师为书稿校对所做的工作，正是他们的努力，才能使本书得以早日出版。

由于水平有限，成书仓促，书中一定还有不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

杨艳萍　明清河

目　　录

第 1 章　微积分基本定理

微积分基本定理作为数学分析的核心定理，是微积分这门学科建立的标志。它揭示了微分与积分这对矛盾的内在联系和转化规律，使微分学与积分学成为一门统一的学科；微积分基本定理是联系导数、微分、不定积分、定积分的桥梁和纽带，具有重要的理论意义和实用价值。

1.1　微积分基本定理的历史演变

微积分基本定理从发现到形成现在的形式，跨度将近两个世纪，大致分为发现、创立和完善三个阶段，对其作出主要贡献的有巴罗、牛顿、莱布尼茨、柯西等人。

1.1.1　微积分基本定理的发现阶段

微积分基本定理的最早形式是巴罗的几何形式的微积分基本定理。

微分和积分的概念，在古希腊和古代中国就已经萌芽，15～16 世纪，一大批数学家沿着古人的道路，在求切线、求面积这两类微分和积分的基本问题上进行了深入的研究，但并未形成统一的方法，特别是他们并未看到“求切线”和“求面积”之间的互逆关系。

17 世纪英国数学家巴罗（Isaac Barrow，1630－1677）是第一个看到这一互逆关系的人，他在其著作中，给出求曲线切线的方法，引入“微分三角形”的概念，以明确形式给出了求切线和求面积之间的互逆关系，对于牛顿和莱布尼茨确立微积分体系起到了重要的启发作用。

巴罗在《几何讲义》一书中，以几何形式给出了求面积和求切线的互逆关系，这一关系用现代数学语言可以表述为：

建立坐标系 xOy，使 Oy 向下，现有增函数 $y=f(x)$ 在坐标系中表示为曲线 BGE（见图 1.1）。

$D(x,0)$为 Ox 上任一点，曲线 BGE 和 OD 及纵线 BO、ED 所围成的面积（即曲边梯形 $OBED$ 的面积）是 x 的函数，记作 $S(x)$。

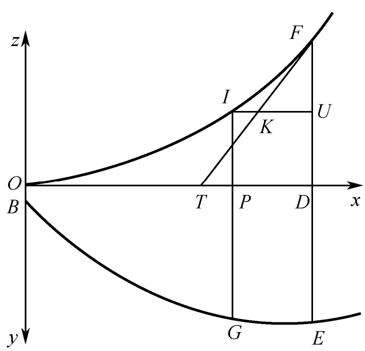


图 1.1

为了便于比较，以 Oy 的反方向为 Oz，建立坐标系 xOz，作出函数 $z=S(x)$的曲线 OIF，$F(x,S(x))$ 是 ED 延长线与曲线的交点，在 Ox 上取点 T，使得 $TD=\dfrac{DF}{ED}=\dfrac{S(x)}{y}$，

巴罗断言，直线 TF 是曲线 OIF 在点 F 的切线（原话是 TF 仅在点 F 与 OIF 相接触），并以较为初等的方法加以证明。

很容易看出直线 TF 是分析意义下面积函数 $S(x)$的切线，若同时适当地定义斜率，则上述结论就相当于 $S'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=f(x)$。

巴罗的这一结果被认为是微积分基本定理的最早形式，从而对微积分的创立起到了巨大的作用，由于这一结果是用几何语言叙述的，较难理解，应用也较为困难，再加上巴罗本人对于接近微积分基本定理的重大发现似乎认识不足，因此这一发现在当时影响不大。

1.1.2 微积分基本定理的创立阶段

揭示微分和积分内在联系，创立微积分基本定理的是牛顿和莱布尼茨。

1．牛顿的反流数形式的微积分基本定理

英国著名的物理学家、数学家和天文学家牛顿（Isaac Newton，1643－1727）是微积分学的奠基人，他是在前人的工作基础上进行分析和综合，建立他的理论体系的，他将古希腊以来求解无穷小问题的各种技巧统一为两类普遍的算法——微分和积分，以“流数”（导数）为该理论的核心概念，并通过逆过程（反流数）来解决面积等积分问题。

他通过考虑函数关系中自变量的无穷小量变化和相应的函数变化量之间的比例关系，得到人类有史以来最有力的数学工具——微分方法及其思想，牛顿称之为“流数法”，进而，他发现反流数法，可以由切线求出曲线，由流数求出函数，更加神奇的是利用反流数法，可以轻松求出曲线所围图形的面积，而不必借助复杂的穷竭法。牛顿将求曲线的切线和面积之间的互逆关系从巴罗的纯几何形式推广到代数形式的互逆运算形式，这是历史上第一次以明确形式给出了微积分基本定理。

以下是牛顿在《论流数》（1666）中首次给出的微积分基本定理：

设 y 为曲线 $g=f(x)$ 下图形 abc 的面积，作 $de/\!/ab, ad\perp ab, ce\perp de, be=1$，当垂直线 cbe 以单位速度向右移动时，cb 扫出面积 $abc=y$，其流数 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=q$，$be$ 扫出 $adbe=x$，其流数 $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=p=1$，因此，$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\left(\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right)=\dfrac{q}{p}=q=f(x)$；于是面积 y 可以通过面积的变化率 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=f(x)$，经过反流数求得（见图 1.2）。

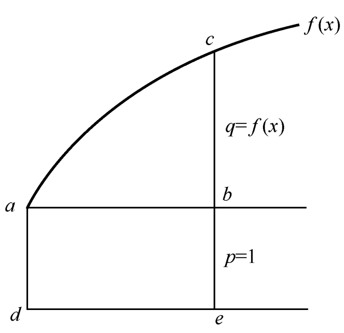


图 1.2

这里，牛顿虽未以命题形式叙述和证明微积分基本定理，但他确实很清楚地看到这个事实，并应用它使许多动力学、运动学的问题变为简单问题，为经典

物理学做出了开创性的工作。牛顿在以后的著作中，如《流数法和无穷级数》中将微积分分为两个基本问题：已知流量关系，求流数比；已知含流数的方程，求流量的关系。从而确定这两个问题的互逆关系，进而建构起系统的微分法和反微分法。

2．莱布尼茨的建立在符号基础上的微积分基本定理

德国哲学家、数学家莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646－1716）也是微积分的奠基人，他开始研究数学的时间比牛顿要晚，在 17 世纪 70 年代，他了解到笛卡儿、瓦里斯、巴罗在研究微积分的工作，并萌发了与微积分有关的思想。作为一位哲学家，他是从发现和揭示微积分基本原理入手发展他的学说的，独立的微分 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 作为他的体系的基本概念，面积和体积被看成若干个微分之和。

巴罗的微分三角形对莱布尼茨有着重要启发，对微分三角形的研究，使他意识到：曲线切线依赖于纵坐标的差值与横坐标差值之比，求面积依赖于横坐标的无穷小区间的纵坐标之和，再加上他对整数平方和序列中“和”与“差”关系的研究，使他意识到求切线和求积问题是一对互逆的问题，从而促使他去研究“$\int$”的运算（积分）和“d”的运算（微分）之间的关系。在他研究了积分和微分的运算之后，注意到这样一个事实：

对于 $p\mathrm{d}x = x\mathrm{d}x$，转换成和式就变为 $\int p\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x$，而从我们所建立的求切线的方法中，明显地有 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x\mathrm{d}x$，所以反过来 $\frac{1}{2}x^2 = \int x\mathrm{d}x$。

因此作为普通运算的幂和根式、和与差、“$\int$”和“d”是互逆的。通过以上不充分的论证，莱布尼茨第一次表达出微分和积分之间的互逆关系。

1675－1676 年间，他给出微积分基本定理 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f(b) - f(a)$，$\int f(x)\mathrm{d}x = A$，其中 A 为曲线 f 所围图形的面积。

1693 年，他给出了上述定理的一个证明，发表在《教师学报》上。

1.1.3　微积分基本定理的完善阶段

牛顿和莱布尼茨的微积分体系中，总是将积分看成微分的逆运算，并且他们的积分概念也是含糊不清的，有时为定积分，有时又为不定积分，特别是将积分定义为微分的逆命题，从某种意义上影响了积分学作为相对独立数学分支的发展，造成了微积分发展的曲折，这种情况到微积分进行严格化尝试时才有所变化。

19 世纪法国著名的数学家、物理学家柯西（Cauchy，1789－1857）是微积分的真正理论基础——极限理论的缔造者，我们今天看到极限、连续性定义、把导数看成差商的极限、把定积分看成和的极限、微积分基本定理的现代形式和证明，都是柯西给出的。

柯西在他的《无穷小计算概念》（1823）中对定积分做了最系统的开创性工作，首先他恢复了把积分作为和的特征。

他对连续函数 $f(x)$ 给出了定积分作为和的特征，他指出：如果 $f(x)$ 是定义在区间 $[x_0,x]$ 上的连续函数，区间 $[x_0,x]$ 被 x 的值 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 所分割，那么 $f(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上的积分是特征和式

$$f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

在 $[x_{i+1},x_i]$ 无限减小时的极限。柯西证明了“这个极限仅仅依赖于函数 $f(x)$ 的形式以及变量 x 的两端值 x_0 和 x”，因此他称这个极限为定积分，记作 $\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$，用以代替高斯对反微分法经常使用的记号 $\int f(x)\mathrm{d}x\begin{bmatrix} x=b \\ x=a \end{bmatrix}$。

接着，柯西定义 $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$，利用推理证明了 $F(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上连续，并且设

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)\mathrm{d}x$$

利用积分中值定理证明了 $\left[\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，即 $f(x)$ 在区间 $[x_0,x]$ 上的定积分的导数就是 $f(x)$ 本身，这就是微积分基本定理的现代形式，他所给的证明也是微积分基本定理的第一个严格证明。

柯西接着证明了“给定函数 $f(x)$ 的全体原函数彼此只差一个常数”之后，定义了不定积分

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{x} f(x)\mathrm{d}x+C$$

柯西指出，若 $f'(x)$ 连续，则 $\int_{a}^{b} f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$，从而完成了揭示微积分基本定理的全部任务。

1.2 微积分基本定理的内容与证明

微积分基本定理描述了微积分的两个主要运算——微分和积分之间的关系，其内容包含两个部分或以两种形式表述。第一部分称为微积分第一基本定理（也称为原函数的存在定理、积分上限函数的求导公式、微分形式的微积分基本定理），表明不定积分是微分的逆运算，其重要之处在于它保证了某连续函数的原函数的存在性；第二部分称为微积分第二基本定理（也称为牛顿–莱布尼茨公式、微积分基本公式、积分形式微积分基本定理），表明定积分可以用无穷多个原函数的任意一个来计算，其重要之处在于它大大简化了定积分的计算。

1.2.1 微积分第一基本定理及其证明

定理 1.1（微积分第一基本定理、微分形式的微积分基本定理）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$，则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x), x\in[a,b]$，亦即 $\mathrm{d}\Phi(x)=\mathrm{d}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\mathrm{d}x$。

证法一（利用积分中值定理）

对 $[a,b]$ 上任一确定的 x，当 $\Delta x\neq 0$ 且 $x+\Delta x\in[a,b]$ 时，按定义式有

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$$

由积分第一中值定理，得

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=f(x+\theta\Delta x),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

由于 f 在点 x 连续，故有

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\theta\Delta x)=f(x)$$

所以

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

证法二（利用牛顿−莱布尼茨公式）

因 $$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$$

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$，故由牛顿−莱布尼茨公式得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=F(x+\Delta x)-F(x)$$

即 $$\Delta\Phi=F(x+\Delta x)-F(x)$$

所以 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=f(x)$$

即 $$\Phi'(x)=F'(x)=f(x)$$

所以 $$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

证法三（利用连续函数的定义和定积分的保号性）

任取一点 $x_0\in[a,b]$，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，由连续函数的定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x-x_0<\delta$ 时有

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，根据定积分的保号性知：

$$\left[f(x_0)-\varepsilon\right](x-x_0)<\int_{x_0}^x f(x)\mathrm{d}x<\left[f(x_0)+\varepsilon\right](x-x_0)$$

注意到 $$\varPhi(x)-\varPhi(x_0)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$$

从而有 $$f(x_0)-\varepsilon<\frac{\varPhi(x)-\varPhi(x_0)}{x-x_0}<f(x_0)+\varepsilon$$

同理，此式当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时也成立。

由极限的定义知 $$\lim_{x\to x_0}\frac{\varPhi(x)-\varPhi(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

即有 $$\varPhi'(x_0)=f(x_0)\text{，}\quad x_0\in[a,b]$$

由 x_0 的任意性知 $\varPhi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$。

1.2.2 微积分第二基本定理及其证明

定理 1.2（微积分第二基本定理、积分形式的微积分基本定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且存在原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$。

证法一（利用定积分的定义和微分中值定理）

由定积分的定义，即证明：任给 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\|T\|<\delta$ 时，有 $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-[F(b)-F(a)]\right|<\varepsilon$。

对于 $[a,b]$ 的任一分割 T，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上应用拉格朗日中值定理，则存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，使得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^n F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续，所以对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$，于是，当 $\Delta x_i\leqslant\|T\|<\delta$ 时，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，便有 $|\xi_i-\eta_i|<\delta$，故

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-\big[F(b)-F(a)\big]\right|=\left|\sum_{i=1}^n\big[f(\xi_i)-f(\eta_i)\big]\Delta x_i\right|$$
$$\leqslant\sum_{i-1}^n\left|f(\xi_i)-f(\eta_i)\right|\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}.\sum_{i=1}^n\Delta x_i=\varepsilon.$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 成立。

证法二（利用原函数存在定理）

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据微积分第一基本定理知 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，而 $f(x)$ 的任意两个原函数只能相差一个常数，所以

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$$

若在上式中令 $x=a$，则因 $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$ 得到 $C=F(a)$，移项后为 $F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，再令 $x=b$，即得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$。

证法三（利用微分与定积分的定义）

因 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的一个分割，则

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta F(x_i)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{d}F(x_i)+o(\Delta x_i)]\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}F(x_i)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i\end{aligned}$$

而由定积分的定义知 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$。故得 $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

1.3　微积分基本定理的相关内容分析

1.3.1　微积分基本定理的条件与结论

1．微积分第一基本定理的条件与结论

微积分第一基本定理（微分形式的微积分基本定理）沟通了导数和定积分这两个从表面看上去似乎不相干的概念之间的内在联系，同时也证明了“连续函数必有原函数”这一基本结论，并以积分形式给出了 f 的一个原函数 $\varPhi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$。该定理也称为原函数的存在定理。

该定理的条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，如果没有连续这个条件，其证明过程就不成立。如果将条件换成可积，结论不成立。

例如分段函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\neq 1\\2, x=1\end{cases}$，这个函数只有一个可去间断点，因此在 $[0,2]$ 内是可积的，但是这个函数的原函数不存在，因此微积分第一基本定理中的连续不能换成可积。

2．微积分第二基本定理的条件与结论

微积分第二基本定理（积分形式的微积分基本定理）沟通了原函数（不定积分）和定积分这两个从表面看上去似乎不相干的概念之间的内在联系，将求函数定积分的计算转化为求函数原函数（不定积分）的计算，并将定积分归结为与被积函数及积分

区间端点有关的量，定积分的值是原函数在区间端点值的差。该定理为计算定积分提供了一个十分方便有效的方法。该定理也称为牛顿–莱布尼茨公式或微积分基本公式。

该定理的条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且存在原函数 $F(x)$，其中连续的条件不是必须的，可将此条件放宽为： $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且存在原函数 $F(x)$（证明在1.5 节中给出）；但可积的条件是必须的，因为在 $[a,b]$ 上有原函数的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上未必可积。如

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, 0<x\leqslant 1 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}, \quad f(x)=F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, 0<x\leqslant 1 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}$$

因此 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无界，所以 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积。

该定理的条件还可以改变为更一般的形式：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，除有限个点外，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数（证明在 1.5 节中给出）。

1.3.2 微积分基本定理的意义与作用

历史上微分学与积分学是独立的两门学问，微分学的中心问题是切线问题，积分学的中心问题是求积问题，微分和积分本质上是平行发展、互不干涉的两个概念，直到出现微积分基本定理后，才在微分与积分之间架起了一座桥梁。微积分基本定理不仅给出了计算定积分的方法，而且在理论上标志着微积分完整体系的形成，从此微积分才真正成为一门学科。

1. 微积分基本定理揭示了定积分与不定积分之间的联系，为计算定积分提供了一个十分方便有效的方法

定积分是作为求连续量连续作用的总和或积累引入的，是黎曼和的极限，而不定积分是作为微分运算的逆运算引入的，因此定积分与不定积分是没有关系的。微积分基本定理从理论上揭示了原函数（不定积分）与定积分之间的联系。在微积分基本定理建立之前，人们计算每一个定积分都要探求一种特殊的方法才能把它算出来，微积分基本定理使定积分的计算大大前进了一步，将求黎曼和的极限转化为用统一的求原函数的方法（求不定积分）计算定积分，使定积分的计算成为可能，而且可以机械化地进行。

2. 微积分基本定理还揭示了微分与积分之间的本质联系——微分与积分是互逆运算

微分形式的微积分基本定理表明，对函数 $f(x)$ 取（变上限）积分之后，再取导数；或对表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 取积分之后，再取微分，则完全恢复原状，犹如先后进行的两种运算互相“抵消”。因此，可以认为微分（或导数）与积分为互逆运算。

牛顿–莱布尼茨公式则从另一角度对微分与积分的互逆关系做了进一步揭示。可以从上面关于微积分第二基本定理的证明进行分析：

用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 对区间 $[a,b]$ 进行分割，通过整理变形，利

用微分中值定理得

$$F(b)-F(a)=[F(x_1)-F(x_0)]+[F(x_2)-F(x_1)]+\cdots+[F(x_n)-F(x_{n-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $x_{i-1}<\xi_i<x_i$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，令 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$，上式两边取极限得

$$F(b)-F(a)=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{$*$}$$

式子 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}F'(\xi_i)\Delta x_i$ 可粗略地理解为函数 $F(x)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 处的微分之和：

$$\mathrm{d}F_i=F'(x_{i-1})\Delta x_i,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)\Delta x_i\approx\sum_{i=1}^{n}F'(x_{i-1})\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}F_i$$

而式子 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，即积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 可理解为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上各点处的微分“总和”，又由于

$$\mathrm{d}F_i\approx\Delta F(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}F_i\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta F(x_i)=F(b)-F(a)$$

因此，（$*$）式又表明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上各点处的微分“总和”（即定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$）就是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的增量 $F(b)-F(a)$。

这就从理论上揭示了积分与微分分别是同一变量（原函数增量）的整体形式和局部形式，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是微分 $\mathrm{d}F_i$ 的无限积累，微分 $\mathrm{d}F_i$ 是积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的无限细分，这就从“和”与“差”的角度进一步阐明了微分与积分的互逆关系。

3．微积分基本定理是沟通导数、微分、不定积分、定积分的桥梁和纽带

导数、微分、不定积分与定积分是微积分学中最重要的概念，其中微分与不定积分都是由导数定义的，它们之间的联系是明显的，但定积分同这三个概念间的联系却不能从定义中看出。

正是微积分基本定理从理论上揭示了定积分与微分之间的互逆关系，使微积分的四个重要概念得到了完全沟通，从而使微分学与积分学形成一个有机整体。至此便可以看出，将定理冠以“微积分基本定理”是理所当然的了。

1.3.3　两种形式微积分基本定理之间的关系

两种形式的微积分基本定理是等价的，都描述了微分和积分之间的关系，只是

分别以微分形式和积分形式来表述而已。

有的教材中先提出原函数的存在定理，再提出牛顿−莱布尼茨公式（如华东师范大学出版社的《数学分析》第 2 版），原函数的存在定理的证明方法利用了积分中值定理（见定理 1.1 的证明），牛顿−莱布尼茨公式的证明方法除采用定理 1.2 的证明方法外，还可以利用先提出的原函数的存在定理来证明，方法如下：

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据原函数的存在定理知，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，而 $f(x)$ 的任意两个原函数只能相差一个常数，所以 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$。若在上式中令 $x=a$，则因 $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$ 得到 $C=F(a)$，移项后为 $F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，再令 $x=b$，即得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$。

有的教材中先提出牛顿−莱布尼茨公式，再提出原函数的存在定理（如华东师范大学出版社的《数学分析》第 3、第 4 版），牛顿−莱布尼茨公式的证明方法利用了微分中值定理（见定理 1.2 的证明），原函数的存在定理的证明方法利用了积分中值定理（见定理 1.1 的证明）。

1.3.4 微积分基本定理与其他定理之间的关系

1．微积分基本定理是积分学重要公式的理论基础

积分学理论体系中的不少重要公式，如定积分的换元公式、分部积分公式等的证明都用到微积分基本定理。我们以定积分换元积分法的证明为例。

定积分换元积分法 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，函数 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，且满足 $\varphi(\alpha)=a$， $\varphi(\beta)=b$， $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$， $t\in[\alpha,\beta]$，则有定积分换元公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证明 由于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 两端积分中的被积函数都是连续的，所以它们的原函数都存在。设 F 是 f 在 $[a,b]$ 上的原函数，即 $F'(x)=f(x)$，由复合函数微分法 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\varphi(t)]=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$，可见 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数，根据牛顿−莱布尼茨公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 得

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F[\varphi(t)]\big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$$

2．微积分基本定理建立了微分中值定理与积分中值定理的联系

微分中值定理 设函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $F'(\xi)=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$，即

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$$

积分中值定理　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

由微积分基本定理知，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)$$

这就把两个中值定理联系了起来。

3．微积分基本定理的思想可以应用到多元函数的积分

微积分基本定理还揭示了一个事实：定积分可归结为一个只与被积函数及积分区间端点有关的量，这一思想也可以推广到多元函数的积分，如格林公式、高斯公式、斯托克斯公式就表明多元函数在某个区域上的积分可归结为一个只与被积函数及积分区域的边界有关的量（积分区域为区间时，其边界为区间的端点；积分区域为平面区域或曲面区域时，其边界为一条封闭曲线）。

1.4　微积分基本定理的应用

1.4.1　求含有变限积分函数的导数

例 1.1　设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{t^2}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$， $g(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\cos t^2\mathrm{d}t$， 求 $f'(x),g'(x)$。

解　由微积分基本定理得

$$f'(x)=\frac{x^4}{\mathrm{e}^{x^2}}\cdot 2x=\frac{2x^5}{\mathrm{e}^{x^2}}$$

$$g'(x)=\cos x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\cos\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$$

例 1.2　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$， 证明

$$F''(x)=f(x)$$

证明

$$F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

则

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$F''(x)=f(x)$$

例 1.3　计算下列各题

（1）求由方程 $\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t-\int_0^x\cos t\mathrm{d}t=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

（2）求由方程 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$；

（3）求由参数方程 $\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解 （1）由隐函数的求导法则，在方程 $\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=0$ 的两边同时关于 x 求导得

$$\mathrm{e}^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\cos x=0$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos x}{\mathrm{e}^y}$$

（2）对右端的积分令 $x-t=u$，则有

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=x+\int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u$$

两边同时关于 x 求导并整理得

$$f(x)=1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\text{，且 } f(0)=1$$

再对上式两边关于 x 求导得 $f'(x)=f(x)$，由此解得 $f(x)=C\mathrm{e}^x$，再由 $f(0)=1$ 可知 $C=1$，故 $f(x)=\mathrm{e}^x$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x$。

（3）由参数方程的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\cos t^2+t(-\sin t^2)\cdot 2t-\dfrac{\cos t^2}{2t}\cdot 2t}{-\sin t^2\cdot 2t}=t$$

1.4.2 求含有变限积分函数的极限

例 1.4 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^3\mathrm{d}t}{x^4}$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan(x-t)\mathrm{d}t}{\sin 3x\cdot\ln(1+2x)}$。

解 （1）由罗比达法则得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^3\mathrm{d}t}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{4x^3}=\dfrac{1}{4}$。

（2）由罗比达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\cdot\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

（3）因 $$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2x\int_0^x e^{t^2}dt}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{x^2}}{2\int_0^x e^{t^2}dt+2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x^2}{2+2x^2}=1$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{\frac{1}{x^2}}}=e$$

（4）对 $\int_0^x \arctan(x-t)dt$ 作变量替换 $x-t=u$，得

$$\int_0^x \arctan(x-t)dt=\int_x^0 \arctan u\,d(-u)=\int_0^x \arctan u\,du$$

再由当 $x\to 0$ 时，$\sin 3x \sim 3x$，$\ln(1+2x)\sim 2x$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan(x-t)dt}{\sin 3x\cdot\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan u\,du}{3x\cdot 2x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan u\,du}{x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x}=\frac{1}{12}$$

例 1.5　求下列极限

（1）设 $f(x)$ 导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt}{x^4}$；

（2）设 $f(x)$ 连续且 $f(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^{\frac{1}{x}} f(tx)\,dt}{x^2-1}$。

解　（1）$\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt=-\dfrac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\,d(x^2-t^2)$

令 $u=x^2-t^2$，则

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\,d(x^2-t^2)=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\,du$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\,du}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x^2)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{f(x^2)}{x^2}$$

再令 $x^2=t$ 得 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\frac{f(x^2)}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{f(t)}{t}$$

由 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ 知

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)=1$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)dt}{x^4}=\frac{1}{4}$$

（2）令 $u=tx$，则

$$\int_1^{\frac{1}{x}} f(tx)\mathrm{d}t = \int_x^1 f(u)\mathrm{d}\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x}\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u$$

所以
$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{\frac{1}{x}} f(tx)\mathrm{d}t}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u}{x^3-x} = \lim_{x\to 1}\frac{-f(x)}{3x^2-1} = -\frac{1}{2}$$

例 1.6　设 a,b,c 为实数，$b>-1,c\neq 0$，试确定 a,b,c，使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t} = c$$

解　因
$$\lim_{x\to 0}(ax-\sin x)=0,\ c\neq 0$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t = 0$$

故
$$b=0$$

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{ax-x\cos x}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x+x\sin x}{\frac{3x^2}{1+x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{3x^2}\Rightarrow a=1$$

故
$$c=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

所以 $a=1$，$b=0$，$c=\frac{1}{6}$。

1.4.3　求含有变限积分的函数方程的解

例 1.7　计算下列各题

（1）设有函数 $f(x)+\cos x+\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=0$，求 $f(x)$；

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 连续，$f(1)=3$ 且当 $x>0,y>0$ 时有

$$\int^{xy} f(t)\mathrm{d}t = x\int_1^y f(t)\,\mathrm{d}t + y\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

求 $f(x)$。

解　（1）方程两边同时对 x 求导得

$$f'(x)-\sin x+\frac{f(x)}{x}=0$$

即
$$f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\sin x$$

解此一阶线性微分方程得

$$P(x)=\frac{1}{x},Q(x)=\sin x$$

则
$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$
$$=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\left[\int \sin x\cdot \mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{\sin x}{x}-\cos x+\frac{C}{x}$$

在上式中令 $x=\frac{\pi}{2}$，得 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}C$，在原方程中令 $x=\frac{\pi}{2}$，得 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$。

所以 $C=-1$。故 $f(x)=\frac{\sin x}{x}-\cos x-\frac{1}{x}$。

（2）在已知等式两边对 y 求导得

$$xf(xy)=xf(y)+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

令 $y=1$，由 $f(1)=3$，则

$$xf(x)=3x+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

上式两边对 x 求导得
$$f(x)+xf'(x)=3+f(x)$$

即 $f'(x)=\frac{3}{x}$，所以 $\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{3}{t}\mathrm{d}t$，即 $f(x)-f(1)=3\ln x$。

故 $f(x)=3(1+\ln x)$。

例 1.8　设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数，且对任意的 $a>0$ 和 $b\geqslant 1$，积分值 $\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关，则存在常数 c，使得

$$f(x)=\frac{c}{x},\quad x\neq 0$$

证明　由于 $\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关，故取 $a=1,b=x\geqslant 1$ 和 $a=y,b=x\geqslant 1$，可得 $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\int_y^{yx}f(t)\mathrm{d}t$。

设
$$\varPhi(x)=\int_y^{yx}f(t)\mathrm{d}t-\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=0,\ x\in(0,+\infty)$$

则
$$\varPhi'(x)=yf(yx)-f(x)=0$$

所以 $yf(yx)=f(x)$，特别地，$yf(y)=f(1)$。

令 $c=f(1)$，即得 $f(y)=\frac{c}{y}$，容易验证 $f(x)=\frac{c}{x}$ 满足题设条件。

例 1.9　若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且对任意 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ 有 $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=0$，证明

$$f(x)\equiv 0,\ x\in(a,b)$$

证明　构造函数
$$F(x)=\int_{\frac{a+b}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t$$

由已知条件知，对任意的 $x\in(a,b)$ 有 $F(x)=0$。由 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续知，$F(x)$

可导且 $F'(x)=f(x)$。

故 $f(x)\equiv 0$。

1.4.4 讨论含变限积分函数的性质

例 1.10 证明下列命题

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续增，$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, & x\in(a,b]\\ f(a), & x=a\end{cases}$，则 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的增函数。

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $f(x)>0$，则 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 为 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数。

证明 （1）$F'(x)=-\dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{x-a}\left(\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'$

$$=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

由积分中值定理知，存在 $\xi\in(a,x)$ 使得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(x-a)$$

所以
$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)]$$

由于 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数，故 $f(x)-f(\xi)\geqslant 0$，从而

$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)]\geqslant 0$$

由此知 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数。

（2）任给 $x>0$，有

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\left[xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

由 $f(x)>0$ 知 $(x-t)f(t)>0$，从而

$$\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t>0$$

所以 $\varphi'(x)>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格递增。

例 1.11 若 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，且 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解 令 $u=xt$，则

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,\quad \varphi'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{A}{2}$$

故 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 连续。

1.4.5　构造变限积分辅助函数，证明等式与不等式

例 1.12　若 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$ 。

证明　设
$$\varPhi(x)=\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u-\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$
则
$$\varPhi'(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$$
由于 $\varPhi(0)=0$，所以 $\varPhi(x)=0$，即
$$\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

例 1.13　证明下列命题

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加且连续，则 $\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$；

（3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0,0<f'(x)\leqslant 1$，证明：
$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

证明　（1）引入新参数 t，设
$$F(t)=\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$
易知 $F(a)=0$，$F(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且
$$F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{1}{2}\int_a^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$$
由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加知 $F'(t)\geqslant 0$ 。故 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，即 $F(b)\geqslant F(a)=0$，亦即
$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

（2）设 $$F(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-(x-a)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t,\ \forall x\in[a,b]$$

则
$$\begin{aligned}F'(x)&=2f(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t-(x-a)f^2(x)\\&=\int_a^x\left[2f(x)f(t)-f^2(x)-f^2(t)\right]\mathrm{d}t\\&=-\int_a^x\left[f(x)-f(t)\right]^2\mathrm{d}t\leqslant 0\end{aligned}$$

即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减，故 $F(b)\leqslant F(a)=0$，亦即
$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

（3）做辅助函数 $F(t)=\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right]^2-\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x$，利用单调性，可证。

（4）设 $$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t-(x-a)\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

则
$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x)\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t+g(x)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t-(x-a)f(x)g(x)\\&=\int_a^x[f(x)g(t)+g(x)f(t)-f(t)g(t)-f(x)g(x)]\,\mathrm{d}t\\&=-\int_a^x[f(x)-f(t)][g(x)-g(t)]\,\mathrm{d}t<0\end{aligned}$$（因为 $f(x),\ g(x)$ 均为增函数）

即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，所以 $F(b)\leqslant F(a)$。

故得证！

例 1.14 设函数 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可微，$g(0)=0$，试证：
$$\int_0^a|g(x)g'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a|g'(x)|^2\,\mathrm{d}x$$
其中，当且仅当 $g(x)=Cx$（C 为常数）时等号成立。

证明 记 $h(x)=\int_0^x|g'(t)|\mathrm{d}t$，则
$$|g(x)|=\left|\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant h(x)$$
$$\int_0^a|g(x)g'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a h(x)h'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}h^2(a)$$
$$h^2(a)=\left(\int_0^a|g'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\leqslant a\int_0^a g'^2(t)\mathrm{d}t$$

所以 $$\int_0^a|g(x)g'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a g'^2(t)\mathrm{d}t$$

例 1.15 设 $p(t),\varphi(t),\psi(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，$\varphi(t),\psi(t)$ 单调增加，$p(t)>0$，试证：
$$\int_a^b p(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^b p(t)\psi(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b p(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^b p(t)\varphi(t)\psi(t)\mathrm{d}t$$

证明　设

$$f(x)=\int_a^x p(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x p(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x p(t)\varphi(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f'(x)=p(x)\varphi(x)\int_a^x p(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t+p(x)\psi(x)\int_a^x p(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t-$$

$$p(x)\int_a^x p(t)\varphi(t)\,\psi(t)\mathrm{d}t+p(x)\varphi(x)\psi(x)\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{f'(x)}{p(x)}=\int_a^x p(t)\big[\varphi(x)-\varphi(t)\big]\big[\psi(t)-\psi(x)\big]\mathrm{d}t\leqslant 0$$

故 $f'(x)\leqslant 0$，即 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，所以 $f(b)\leqslant f(a)$，即

$$\int_a^b p(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_a^b p(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_a^b p(t)\varphi(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

1.4.6　利用微积分基本定理证明数学分析中的重要定理

例 1.16　利用微积分基本定理证明积分第一中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$。

证明　设积分上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,x\in[a,b]$。

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以由微积分基本定理知 $F(x)$ 可导且 $F'(x)=f(x)$，再对 $F(x)$ 使用微分中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$$

即得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$。

例 1.17　利用微积分基本定理证明推广的积分第一中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证明　当 $g(x)=0$ 时，定理显然成立。

现设 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\neq 0$，构造两个积分上限函数：

$$\varPhi(x)=\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,\ F(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$

因为 $\varPhi(x)$、$F(x)$ 满足柯西微分中值定理的条件，且

$$F(b)-F(a)=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$$

所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{\varPhi(b)-\varPhi(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{\varPhi'(\xi)}{F'(\xi)}$，由微积分基本定理知 $\varPhi'(x)=f(x)g(x),F'(x)=g(x)$，所以

$$\frac{\varPhi(b)-\varPhi(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{\varPhi'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}=f(\xi)$$

又 $$\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,\ F(b)-F(a)=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

所以 $$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}=f(\xi)$$

故 $$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

例 1.18 利用微积分基本定理证明拉格朗日中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

证明 设积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x \{f'(t)(b-a)-[f(b)-f(a)]\}\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$

显然 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\Phi(a)=\Phi(b)=0$。故由罗尔中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\Phi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)(b-a)-[f(b)-f(a)]=0$$

所以 $$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

例 1.19 利用微积分基本定理证明柯西中值定理：若函数 $f(x), g(x)$ 满足如下条件：

（1）在闭区间$[a,b]$上连续，

（2）在开区间(a,b)内可导，

（3）对任意的 $x\in(a,b), g'(x)\neq 0$，

（4）$g(a)\neq g(b)$，

则至少存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

证明 设积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x \{f'(t)[g(b)-g(a)]-g'(t)[f(b)-f(a)]\}\mathrm{d}t$$

仿照例 1.18 即可得证。

例 1.20 利用微积分基本定理证明连续函数的零点定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a), f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$。

证明 不妨设 $f(a)>0, f(b)<0$，设积分上限函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

则由微积分基本定理知 $F(x)$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$，由于

$$f(a)=F'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}>0$$

故由保号性知，在 a 点的右邻域内有

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a}>0$$

即
$$F(x)-F(a)>0,\ F(x)>F(a)$$

这表明 $F(a)$ 不是连续函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，同理可得 $F(b)$ 也不是最大值，故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值只能在 (a,b) 内的某点 ξ 取得，ξ 即为极大值点，由费尔马定理知

$$F'(\xi)=f(\xi)=0$$

1.4.7　利用牛顿−莱布尼茨公式计算定积分

牛顿−莱布尼茨公式告诉我们：一个连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任一原函数在 $[a,b]$ 上的增量，这给定积分提供了一个有效而简单的计算方法，大大简化了定积分的计算手续。但是，该公式中要求被积函数 $f(x)$ 必须是连续函数，条件很严格，实际上，该公式的条件完全可削弱，以扩大微积分基本公式的应用范围，这已在 1.3 节中进行了讨论，下面仅举例说明其应用。

例 1.21　（1）若 $f(x)=\begin{cases}x^3 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-5, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，计算 $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\quad(0\leqslant t\leqslant 2)$；

（2）求 $\int_0^1 t\,|t-x|\,\mathrm{d}x$；

（3）设 $f(x)=\begin{cases}2x, & -\infty<x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2}, & 1<x<+\infty\end{cases}$，计算 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$；

（4）设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -1\leqslant x<0\\ x+1, & 0\leqslant x<1\\ -x^2+4x-2, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x$。

解　（1）此题为分段函数变上限的定积分，由于 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点，所以分两段讨论。

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，
$$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\int_0^t x^3\mathrm{d}x=\frac{t^4}{4}$$

当 $1<t\leqslant 2$ 时，定义
$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x<1\\ -4, & x=1\\ f(x), & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

则
$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x+\int_1^t \varphi(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1+\int_1^t (x-5)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{4}+\left(\frac{x^2}{2}-5x\right)\bigg|_1^t=\frac{t^3}{6}-\frac{5}{2}t^2+\frac{31}{2}\end{aligned}$$

（2）当 $x<0$ 时，$\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}x=\int_0^1 t(t-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}x=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}x+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$

当 $x>1$ 时，$\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}x=\int_0^1 t(x-t)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{3}$

（3）由于 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，故 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$$

（4）$\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\cos x\mathrm{d}x+\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^3(-x^2+4x-2)\mathrm{d}x=4\frac{5}{6}+\sin 1$

牛顿−莱布尼茨公式只是给我们提供了一个计算定积分的简便方法，但它不是万能的，如果函数可积，但原函数无法用初等表达式写出，就需要寻求其他的方法，来求此函数的定积分。

例 1.22 计算下列各式：

（1）$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

（2）$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\lambda}}$；

（4）求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 1+\frac{1}{n-1}, & 1-\frac{1}{n}<x\leqslant 1-\frac{1}{n+1},n=2,3,\cdots\end{cases}$。

解 （1）因为此积分被积函数的原函数不能用初等函数表示，故无法用牛顿−莱布尼茨公式计算。通过换元法可将此积分求出。

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\quad(令x=\pi-t)\\&=-\int_{\pi}^0\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\mathrm{d}t\\&=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t\\&=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-I\end{aligned}$$

故
$$2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=-\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)=\frac{\pi^2}{2}$$

所以 $I=\dfrac{\pi^2}{4}$。

（2）做变量替换 $x=\tan t$，则

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$$

对第二个积分，做变量替换 $t=\dfrac{\pi}{4}-u$，得

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t=-\int_{\frac{\pi}{8}}^{0}\ln\frac{2}{1+\tan u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{8}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln(1+\tan u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$$

所以 $I=\dfrac{\pi}{8}\ln 2$。

（3）设 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\lambda}}$，令 $x=\dfrac{\pi}{2}-u$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\lambda}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\mathrm{d}(-u)}{1+\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]^{\lambda}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1+(\cot u)^{\lambda}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\lambda}u}{1+\tan^{\lambda}u}\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\lambda}x}{1+\tan^{\lambda}x}\,\mathrm{d}x$$

所以

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+(\tan x)^{\lambda}}+\frac{\tan^{\lambda}x}{1+\tan^{\lambda}x}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

即

$$I=\frac{\pi}{4}$$

（4）此题为分段函数的定积分。

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上虽然有无穷多个间断点，但它在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上等于 0，在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积。

利用定积分的定义可得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k-1}\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k-1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{3}{4}$$

1.5 微积分基本定理的推广

1.5.1 原函数存在定理的推广

微积分基本定理又称为原函数的存在定理，可以写为如下形式：

定理 1.1（原函数的存在定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$， $x\in[a,b]$。

引理 1.1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x\in[a,b]$。

可以对原函数的存在定理给出下面的推广：

定义 1.1 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 $[a,b]$ 上除一个有聚点的点列 $t_0,t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots,t_n\to t_0,(n\to\infty)$ 不可导外，其余处处可导，则称 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导。

定义 1.2 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个广义原函数。

定义 1.3 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导有 $F'(x)=f(x)$，且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个连续的广义原函数。

推广 1.1 设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可积且只有 n 个第一类间断点的逐段连续函数，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个连续的广义原函数。

证明 不失一般性，仅就 $n=1$ 证之。

设 c 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的第一类间断点。

令
$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in[a,c)\\ \psi(x), & x\in(c,b]\end{cases}$$

当 $x\in[a,c)$ 时，由定理 1.1 知，$F'(x)=\varphi(x)=f(x)$，$F(x)$ 在 $[a,c)$ 内连续；同理当 $x\in(c,b]$ 时，$F'(x)=\psi(x)=f(x)$，$F(x)$ 在 $(c,b]$ 内连续。

所以，当 $x\neq c$ 时，$F'(x)=f(x)$。

当 $x=c$ 时，因 $F'_-(c)=\varphi(c-0)$，$F'_+(c)=\psi(c+0)$，$\varphi(c-0)\neq\psi(c+0)$。

所以 $F(x)$ 在 c 点不可导，但由引理知 $F(x)$ 在 c 点连续。

故 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个连续的广义原函数。其实，

$$F(x)=\begin{cases}\Phi(x)+[\Psi(c+0)-\Phi(c-0)], & x\in[a,c)\\ \Psi(x), & x\in(c,b]\end{cases}$$

其中 $x\in[a,c)$ 时，$\Phi'(x)=\varphi(x)$，$x\in(c,b]$ 时，$\Psi'(x)=\psi(x)$。

由数学归纳法可知，对任意的 $n\geqslant 2$，结论仍成立。

推广 1.2 设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可积的单调函数，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在

$[a,b]$ 上的一个连续的广义原函数。

证明　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，不失一般性，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加。因单调函数至多有一列第一类间断点，而且函数在各间断点处的跳跃度总和不超过 $|f(b)-f(a)|$。故可设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点为 $t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots<b$，$t_n\to b(n\to\infty)$。

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta<\varepsilon$，因 $t_n\to b(n\to\infty)$，所以 $\exists N$，当 $n>N$ 时，$t_n\in(b-\delta,b]$，在 $[a,b-\delta)$ 内，仅有 $t_1,t_2,\cdots,t_N$ 这有限个间断点，因 $F(x)$ 是 $[a,b-\delta)$ 上一个连续的广义原函数，即 $x\neq t_i(i=1,2,\cdots,N)$ 时，$F'(x)=f(x)$。

由 $0<\delta<\varepsilon$ 时，由 ε 的任意性知，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个连续的广义原函数。

1.5.2　变限积分求导公式的推广

微积分基本定理也称为变限积分的求导公式，可以改为如下形式：

定理 1.1（变限积分求导公式）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$，$x\in[a,b]$。

推广 1.3　若 $f(x)$ 为连续函数，$u(x),v(x)$ 为可导函数，且可实行复合运算 fou 与 fov，则 $\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f[v(x)]v'(x)-f[u(x)]u'(x)$。

证明　取 $f(x)$ 定义域内的一点 a，则

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

令 $\varPhi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=\varPhi[v(x)]-\varPhi[u(x)]$，所以

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=\left(\varPhi[v(x)]\right)'-\left(\varPhi[u(x)]\right)'=f[v(x)]v'(x)-f[u(x)]\,u'(x)$$

1.5.3　牛顿−莱布尼茨公式的推广

定理 1.2（牛顿−莱布尼茨公式）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数，即在 $[a,b]$ 上有 $F'(x)=f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

1．将 $f(x)$ 的连续区间和原函数 $F(x)$ 的存在区间进行减弱，对定理进行推广

推广 1.4　若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，$F(b-0)$ 存在，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的原函数，即在 $[a,b)$ 上有 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b-0)-F(a)$$

证明　对于 $\forall x\in[a,b)$，$f(x)$ 在 $[a,x]$ 上连续，故 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$，对上

式两边取极限，令 $x\to b^-$，则有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b-0)-F(a)$$

类似可得以下结论。

推广 1.5 若 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$F(a+0)$ 存在，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的原函数，即在 $(a,b]$ 上有 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a+0)$$

推广 1.6 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$F(a+0)$，$F(b-0)$ 存在，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 上的原函数，即在 (a,b) 上有 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b-0)-F(a+0)$$

推广 1.7 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，$F(c+0)$，$F(c-0)$ 存在，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上的原函数，即在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上有 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(c+0)+F(c-0)-F(a)$$

2．将原函数 $F(x)$ 的可导区间进行减弱，对定理进行推广

推广 1.8 若 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，$F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$，则 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

证明 对于 $[a,b]$ 的任一分割 T，由已知条件知，$F(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上连续，在 (x_{i-1},x_i) 内可导，故由拉格朗日中值定理知，存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，使得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^n F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i$$

因为 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，从而一致连续，所以对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

于是，当 $\Delta x_i\leqslant\|T\|<\delta$ 时，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，便有 $|\xi_i-\eta_i|<\delta$，故

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-\left[F(b)-F(a)\right]\right|=\left|\sum_{i=1}^n\left[f(\xi_i)-f(\eta_i)\right]\Delta x_i\right|$$

$$\leqslant\sum_{i-1}^n\left|f(\xi_i)-f(\eta_i)\right|\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}.\sum_{i=1}^n\Delta x_i=\varepsilon$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 成立。

3．将 $f(x)$ 的连续条件进行减弱，对定理进行推广

推广 1.9　若 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可积，且存在原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

证明　对于 $[a,b]$ 的任一分割 T，由在 $\left[a,b\right]$ 上有 $F'(x)=f(x)$ 知，$F(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上满足拉格朗日中值定理，即存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，使得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i$$

又由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以令 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$，上式两边取极限得

$$F(b)-F(a)=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

4．将 $f(x)$ 的连续条件和将原函数 $F(x)$ 的可导情况进行减弱，对定理进行推广

推广 1.10　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

推广 1.11　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，且除有限个点外有 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

证明　不妨设 $x_1',x_2',\cdots,x_k'$ 是 $[a,b]$ 上使 $F'(x_i')\neq f(x_i')$ 或 $F'(x)$ 不存在的全部点，由已知条件知，对于 $[a,b]$ 的任一分割 T，将 $x_1',x_2',\cdots,x_k'$ 也作为分割点，组成分割 T'，则 $F(x)$ 在分割 T' 的每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上连续，在 (x_{i-1},x_i) 内可导，由拉格朗日中值定理知

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i,\ \eta_i\in(x_{i-1},x_i)$$

又由于 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可积，所以令 $\|T'\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$，上式两边取极限得

$$F(b)-F(a)=\lim_{\|T'\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

推广 1.12　若 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可积，$F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上只有有限个具有有限跳跃度的间断点 $a,c_1,c_2,\cdots,c_m,b$，且除这些点外有 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{m}\Delta F(c_i)$$

其中 $\Delta F(c_i)=F(c_i+0)-F(c_i-0)$ 为 $F(x)$ 在 c_i 点的跳跃度。

证明 记 $a=c_0, b=c_{m+1}$，不妨设 $c_0<c_1<c_2<\cdots<c_m<c_{m+1}$，在相邻的点 c_i, c_{i+1} 之间，对 $F(x)$ 作连续延拓，定义

$$F(x)=\begin{cases} F(c_i+0), & x=c_i \\ F(x), & x\in(c_i,c_{i+1}), \quad i=0,1,2,\cdots,m \\ F(c_{i+1}-0), & x=c_{i+1} \end{cases}$$

则由上述推论，有
$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x=F(c_{i+1}-0)-F(c_i+0)$$

于是，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{m}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{m}[F(c_i+0)-F(c_i-0)]$$

注 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有 $F(b-0)=F(b), F(a+0)=F(a), F(c_i+0)-F(c_i-0)=0$，则推广 1.12 即为牛顿–莱布尼茨公式。

推广 1.13 若 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可积，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 $[a,b]-A$（A 为 $[a,b]$ 的可列子集）上有 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

推广 1.13 也可表述为：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $[a,b]$ 上几乎处处可导，有 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

证明 详见：邹颖. 关于微积分基本公式的一点注记. 工科数学，1999.3。

5．将牛顿–莱布尼茨公式在多元函数中进行推广

定义 1.4 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b;c,d]$ 上连续，若存在函数 $F(x,y)$ 有 $F''_{xy}(x,y)=f(x,y)$，则称 $F(x,y)$ 为 $f(x,y)$ 的一个原函数。

推广 1.14（二重积分的牛顿–莱布尼茨公式）

设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b;c,d]$ 上连续，$F(x,y)$ 为 $f(x,y)$ 的一个原函数，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)$$

证明 将矩形区域 $D=[a,b;c,d]$ 分为 $n\times m$ 个小矩形区域 $[x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1}]$，$i=0,1,2,\cdots,n-1$，$j=0,1,2,\cdots,m-1$。则

$$\begin{aligned} &F(x_{i+1},y_{j+1})-F(x_{i+1};y_j)-F(x_i,y_{j+1})+F(x_i,y_j) \\ &=F''_{xy}(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j=f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j \end{aligned}$$

其中 $x_i\leqslant\xi_{ij}\leqslant x_{i+1}; y_j\leqslant\eta_{ij}\leqslant y_{j+1}$。

对上式中的 i 及 j 相加，得

$$\sum_{i,j} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)$$

令 $i,j\to\infty$，由 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b;c,d]$ 上连续知

$$F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)=\lim_{i,j\to\infty}\sum_{i,j}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定义 1.5　设 D 为单连通区域，$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，若存在函数 $u(x,y)$，有 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，则称 $u(x,y)$ 为 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的一个原函数。

由曲线积分与路径无关的定理知，若存在函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，则曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关。故可得曲线积分的牛顿−莱布尼茨公式，即推广 1.15。

推广 1.15（与路径无关的曲线积分的牛顿−莱布尼茨公式）

设 D 为单连通区域，$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续的一阶偏导数，$u(x,y)$ 为 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的一个原函数，则

$$\int_{AB}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=u(B)-U(A)$$

证明　由原函数的定义不难知：

$$P(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\ Q(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

设 A、B 两点的坐标分别为 (x_A,y_A) 及 (x_B,y_B)，并设联系两点的任意光滑曲线 K 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases},\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

且 $\varphi(\alpha)=x_A,\varphi(\beta)=x_B;\phi(\alpha)=y_A,\phi(\beta)=y_B$。则沿曲线 K 的曲线积分为

$$\begin{aligned}&\int_{AB}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\ &=\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\phi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\phi(t))\phi'(t)]\mathrm{d}t\\ &=\int_\alpha^\beta\left[\frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}\phi'(t)\right]\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{d}u(\varphi(t),\phi(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\\ &=u(\varphi(t),\phi(t))\big|_\alpha^\beta=u(\varphi(\beta),\phi(\beta))-u(\varphi(\alpha),\phi(\alpha))=u(B)-U(A)\end{aligned}$$

参 考 文 献

［1］陈大均．微积分基本公式和中值定理．工科数学，1995，(1)．

［2］廖大庆，郁时炼．微积分基本定理的发现与思想方法．曲阜师范大学学报，1995，(1)．

［3］陈宁．微积分基本定理——微积分历史发展的里程碑．工科数学，2000，(12)．

［4］陆晓朋，王能超．牛顿–莱布尼茨公式架金桥——微积分史学习札记之一．高等数学季刊，1997，(4)．
［5］王世莹．牛顿–莱布尼茨公式随想．成都教育学院学报，2002，(7)．
［6］胡振媛．对“微积分基本定理”的认识和理解．成都教育学院学报，2000，(3)．
［7］龚国勇．牛顿–莱布尼茨公式条件的研究．玉林师范学院学报：自然科学版，2007，(3)．
［8］宋虎森．牛顿–莱布尼茨公式的一种扩充形式及其应用．太原大学学报，2002，(6)．
［9］李信明．牛顿–莱布尼茨公式的推广．潍坊学院学报，2001，(2)．
［10］郭健．数学分析中几个基本定理的推广．商洛师范专科学校学报，1999，(6)．
［11］骆汝九．牛顿–莱布尼茨公式的推广形式．高等数学研究，2006，(6)．
［12］严平，孙国正．关于微积分基本定理的推广．安徽师范大学学报：自然科学版，2000，(3)．
［13］戴文惠，孟喜成．二元函数的微积分基本定理．陕西师大学报：自然科学版，1994，(2)．
［14］高智民．原函数存在定理在不等式证明题中的应用．高等数学研究，2003，(4)．
［15］杨翰深，熊大生．微积分基本定理的一个证明和理解．工科数学，2001，(4)．
［16］刘勇．微积分基本定理的证明及应用．赤峰学院学报，2009，(7)．
［17］丁殿坤，马芳芳．微积分第一基本定理和积分中值定理的新证法．齐齐哈尔大学学报，2007，(5)．
［18］邹颖．关于微积分基本公式的一点注记．工科数学，1999，(3)．

第 2 章　微分中值定理

微分中值定理是微分学中的重要定理，也是微分学的理论基础。它揭示了函数在区间上的宏观的、整体的性质与函数在某一点（中值点 ξ ）的微观的、局部的性质之间的关系，是联系函数与其导数的桥梁和纽带，也是研究函数的有力工具，具有重要的理论意义和实用价值。微分中值定理包含罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理、泰勒中值定理。其中罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理通常联系的是函数与其一阶导数的关系，泰勒中值定理通常联系的是函数与其高阶导数的关系。

2.1　微分中值定理的历史演变

2.1.1　对微分中值定理的初步认识

人们对微分中值定理的认识可以追溯到古希腊时代，古希腊数学家在几何研究中，得到如下结论："过抛物线弓形的顶点的切线必平行于抛物线弓形的底"，这正是拉格朗日中值定理的特殊情况。希腊著名数学家阿基米德正是巧妙地利用这一结论，求出了抛物线弓形的面积。

意大利数学家卡瓦列里（Cavalieri，Francesco Bonaventura 1598－1647）是积分学先驱者之一。他在《不可分量几何学》（1635 年）的卷一中给出了处理平面和立体图形切线的有趣引理，其中引理 3 基于几何的观点也叙述了同样一个事实：曲线段上必有一点的切线平行于曲线的弦，这是几何形式的微分中值定理，被人们称为卡瓦列里定理。

法国著名数学家费马（Pierre de Fermat，1601－1665）在《求最大值和最小值的方法》（1637 年）中给出了费马定理。费马定理在现行的教科书中，一般作为微分中值定理的引理。

费马在研究极大和极小问题的解法时，得到统一的解法"虚拟等式法"，从而得出原始形式的费马定理。所谓的虚拟等式法，用现代语言来说，就是对于函数 $f(x)$，让自变量从 x 变化到 $x+e$，当 $f(x)$ 为极值时，$f(x)$ 和 $f(x+e)$ 的差近似为 0，用 e 除虚拟等式，即 $\dfrac{f(x+e)-f(x)}{e}\approx 0$，然后让 $e\to 0$，就得到函数极值点的导数值为 0，这就是费马定理。函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极值，并且可导，则 $f'(x_0)=0$。

应该指出，费马给出以上结论时，微积分还处于初创阶段，并没有明确导数、

极限连续的概念，用现代眼光来看，其论断也是不严格的。现在看到的费马定理是后人根据微积分理论和费马发现的实质重新给出的。

2.1.2 罗尔中值定理的演变

法国数学家罗尔（Michel Rolle，1652－1719）在《任意次方程的一个解法的证明》（1691 年）中，给出多项式形式的罗尔定理：

“在多项式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的两个相邻根之间，方程 $na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 至少有一个实根”。

这是现在教科书上罗尔定理的特例，罗尔提出的上述定理，用现代语言表述为：

“若 $f(x)$ 是多项式，在 $f(x)=0$ 的两个相邻的实根之中，$f'(x)=0$ 至少有一个实根”。

这与现代罗尔定理不仅内容有所不同，而且证明也大相径庭，罗尔并没有使用导数的概念与符号，而是利用纯代数方法加以证明，和微积分并没有什么联系，罗尔本人也曾是一个微积分学的极力反对者。

现代形式的罗尔定理，是后人根据微积分理论重新证明的，并把它推广为一般函数（可微函数），“罗尔定理”这一名称是由德国数学家德罗比什（Drobisch，1802－1896）在 1834 年给出的，并由意大利数学家贝拉维蒂斯（Bellavitis）在 1846 年发表的论文中正式使用，使此定理成为微分学的一个基本定理。

2.1.3 拉格朗日中值定理的演变

拉格朗日中值定理是微分中值定理中最重要的定理，法国数学家、物理学家及天文学家拉格朗日（Lagrange 1736－1813）在《解析函数论》（1797 年）一书中提出拉格朗日中值定理，它的最初形式为：

“函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 x_0 和 x 之间连续，$f'(x)$ 的最大值为 A，最小值为 B，则 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 必取 A,B 之间的一个值”。

拉格朗日在《解析函数论》中给出了最初的证明。他的证明很大程度建立在直观基础上，并不是严格的，它依赖于这样一个事实：当 $f'(z)>0$ 时，$f(z)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加。所用的条件也比现在的苛刻，现代中值定理只需 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，而拉格朗日最初的中值定理却需 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，并存在连续导数；并且所用的连续概念也是直观的，“假设变量连续地变化，那么函数将会产生相应的变化，但是如果不经过一切中间值，它就不会从一个值过渡到另一个值”。

19 世纪初，在以柯西等为代表的微积分严格化运动中，人们给出了极限、连续、导数的严格定义，也给拉格朗日中值定理以新的严格证明，柯西在《无穷小计算概论》（1823 年）中定义导数时，利用了拉格朗日的结果，他称之为平均值定理，形式为 $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \ (0<\theta<1)$。

现代形式的拉格朗日定理，是由法国数学家博内特（O. Bonnet）在其著作 *Cours*

de Calcul Differentiel et integral 中给出的，他不是利用 $f'(x)$ 的连续性，而是利用罗尔定理对拉格朗日定理加以证明。

2.1.4　柯西中值定理的演变

对微分中值定理进行系统研究的是法国数学家柯西，他是数学分析严格化运动的推动者，他的三部巨著《分析教程》、《无穷小计算教程概论》（1823 年）、《微分计算教程》（1829 年），以严格化为主要目标，对微积分理论进行了重构。他首先赋予中值定理重要作用，使其成为微分学的核心定理，在《无穷小计算教程概论》中，柯西首先严格地证明了拉格朗日中值定理，又在《微分计算教程》中将其推广为广义的微分中值定理——柯西中值定理。

柯西在《微分计算教程》中给出的柯西定理为：

$f(x)$ 和 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，并且 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不为零，这时对于某一点 $\xi\in[a,b]$，有 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$。

后人把柯西提出的上述定理推广到更一般的情形：

对 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可微的函数 $f(x), g(x)$，在 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)[g(b)-g(a)]=g'(\xi)[f(b)-f(a)]$。并称之为柯西中值定理。

柯西中值定理在柯西的微积分理论系统中占有重要的地位，例如他利用柯西中值定理给洛必达法则以严格的证明，并研究泰勒公式的余项，从柯西起，微分中值定理就成为研究函数的重要工具和微分学的重要组成部分。

2.1.5　泰勒中值定理的演变

17 世纪后期和 18 世纪，为了适应航海、天文学和地理学的需要，要求三角函数、对数函数和航海表的插值有较大的精度，数学家也感到需要有一种较好的方法。

英国数学家格雷戈里和英国数学家、物理学家、天文学家牛顿曾先后独立地得到如今以他们两人的名字命名的格雷戈里−牛顿内插公式，后来英国数学家泰勒（Brook Taylor，1685－1731）由这个公式引申出一个重要公式：

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{2!}+f'''(a)\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

并于 1712 年写信告诉英国天文学家、数学家梅青，1715 年他又以定理的形式载入他的著作《增量法及其逆》中。这个定理是把函数展为无穷级数的有力方法，值得指出的是这个定理早在 1670 年已为格雷戈里所知，稍后德国数学家、哲学家莱布尼茨也曾发现此结论，但他们两人均未发表。

瑞士数学家约翰·伯努利曾于 1694 年在《教师学报》上发表了相同的结果，但是他们的证明不同。从现在的观点来看，泰勒的证明是不严密的，他没有考虑收敛问题。

泰勒中值定理的严格证明是法国数学家柯西在泰勒公式出现一百多年之后才给出的。柯西的证明于 1839 年载入他的《关于级数的收敛》一书中。

1742 年，英国数学家麦克劳林在他的《流数论》中给出了 $a=0$ 的特殊情形，并说明这是泰勒公式的一种特殊情形，现今称之为麦克劳林公式。

英国数学家斯特灵于 1717 年对代数函数，而后在 1730 年他的著作《微分法兼论无穷级数的求和与插值》中对一般函数也给出了这种特殊情形。

法国数学家拉格朗日在其 1797 年的巨著《解析函数论》中，用代数方法率先证明了泰勒展开式，并给出了带有拉格朗日余项的泰勒展开式：

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(a)\frac{h^3}{3!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=f^{(n+1)}(x+\theta h)\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}$， $0<\theta<1$ 称为拉格朗日余项，当 $n=1$ 时即为拉格朗日微分中值定理。

2.2 微分中值定理的内容与证明

2.2.1 罗尔中值定理及其证明

定理 2.1（罗尔中值定理）

若函数 $f(x)$ 满足如下条件：

（1） $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2） $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导；

（3） $f(a)=f(b)$；

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$ 。

证法一（利用费马定理）

因 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的性质，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m。

以下分两种情况来讨论：

（1）当 $M=m$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为常数，因此开区间 (a,b) 内任意点的导数均为 0，因此定理结论成立。

（2）当 $M\neq m$ 时，由条件 $f(a)=f(b)$ 可知，函数的最大值和最小值中至少有一个是在开区间 (a,b) 内的某点 ξ 取得的，根据函数可导性的条件知 $f(x)$ 在 ξ 点可导，由费马定理知 $f'(\xi)=0$ 。

上述证明是一般教科书上通用的方法。关于罗尔中值定理的证明还有以下一些方法。

证法二（利用闭区间套定理）

可参见如下文献：

① Abian A．*A ultimate proof of Rolle theorem*．*Amer.Math.Monthly*，86（1979），484－485.

② Samelson H. *on Rolle's theorm*．*Amer.Math.Monthly*，86（1979），486.

③ 雷燕，李庆芹．Rolle 定理证明及应用的探讨．昆明冶金高等专科学校学报，2011.9.

证法三（利用有限覆盖定理）

可参见文献：朱永庚．Rolle 定理的一个新证明. 陕西师大学报：自然科学版，1980－1981 合刊，54－55.

证法四（利用 Dedelcind 分划的基本定理）

可参见文献：冯平道．Rolle 定理的一个证明．宁夏大学学报：自然科学版，1987，（2）.

证法五（利用完全覆盖的方法）

可参见文献：李万军. Rolle 中值定理的一个新证明. 宜宾学院学报，2004，（2）.

2.2.2 拉格朗日中值定理及其证明

定理 2.2（拉格朗日中值定理）

若函数 $f(x)$ 满足如下条件：

（1） $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续；

（2） $f(x)$ 在开区间(a,b)内可导；

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 。

证法一（通过构造辅助函数，利用罗尔中值定理）

做辅助函数 $$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

显然 $F(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，故由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

关于拉格朗日中值定理的证明，一般教科书上大多采用作辅助函数，利用罗尔定理的方法来证明，当然还可以设辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

$$F(x)=f(x)(b-a)-x[f(b)-f(a)]$$

$$F(x)=\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 1 & x & f(x)\end{vmatrix}$$

$$F(x)=\begin{vmatrix}b-a & f(b)-f(a)\\ x-a & f(x)-f(a)\end{vmatrix}$$

来证明。

证法二（通过构造积分上限函数，利用微积分基本定理）

构造积分上限辅助函数

$$\Phi(x)=\int_a^x\{f'(t)(b-a)-[f(b)-f(a)]\}\mathrm{d}t, x\in[a,b]$$

则由微积分基本定理知 $\Phi'(x)=f'(x)(b-a)-[f(b)-f(a)]$

又显然 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\Phi(a)=\Phi(b)=0$，故由罗尔中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\Phi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)(b-a)-[f(b)-f(a)]=0$$

所以 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

关于拉格朗日中值定理的证明还有其他一些方法，例如以下几种方法。

证法三（利用闭区间套定理）

可参见如下文献：

① 胡璋剑．Lagrange 中值定理的另一证明．湖州师专学报，1995，（6）．

② 王有文．拉格朗日中值定理的另一种证明．忻州师范学院学报，2012，28（2）．

③ 张明波，王娅纷．利用闭区间套定理证明 Lagrange 中值定理．长江大学学报自然科学版，2010，7（2）．

④ 谢元红，欧阳宇锋．拉格朗日中值定理的一个新证明．广西师范大学学报，1993，（2）．

2.2.3 柯西中值定理及其证明

定理 2.3（柯西中值定理）

若函数 $f(x),g(x)$ 满足如下条件：

（1）在闭区间[a,b]上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）对任意的 $x\in(a,b), g'(x)\neq 0$；

（4）$g(a)\neq g(b)$；

则至少存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

证法一（通过构造辅助函数，利用罗尔中值定理）

构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

显然 $F(x)$ 在闭区间[a,b]上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，故由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$$

从而 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 。

关于柯西中值定理的证明，一般教科书上大多采用做辅助函数，利用罗尔定理的方法来证明，辅助函数的做法很多。如还可以设辅助函数

$$F(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)],$$

$$F(x)=\begin{vmatrix}1 & g(a) & f(a)\\ 1 & g(b) & f(b)\\ 1 & g(x) & f(x)\end{vmatrix}$$

等方法证明。

证法二（通过构造积分上限函数，利用微积分基本定理）

构造积分上限辅助函数

$$\varPhi(x)=\int_a^x\{f'(t)[g(b)-g(a)]-g'(t)[f(b)-f(a)]\}\mathrm{d}t,\qquad x\in[a,b]$$

则由微积分基本定理知

$$\varPhi'(x)=f'(x)[g(b)-g(a)]-g'(x)[f(b)-f(a)]$$

又显然 $\varPhi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varPhi(a)=\varPhi(b)=0$ ，故由罗尔中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使得 $\varPhi'(\xi)=0$ ，即

$$f'(\xi)[g(b)-g(a)]-g'(\xi)[f(b)-f(a)]=0$$

所以 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 。

关于柯西中值定理的证明还有其他一些方法，例如以下几种证明方法。

证法三　通过构造辅助函数，利用罗尔定理、闭区间套定理证明；借助引理，并应用反证法证明；用达布（Darboux）定理和反证法证明；利用坐标旋转变换证明等方法。

可参见文献：黄德丽．用五种方法证明柯西中值定理．湖州师范学院学报，2003，（6）．

证法四　可参见文献：邹兆南，谭远顺．Cauchy 微分中值定理的多种探究式证明法．重庆交通大学学报：自然科学版，2009，（10）．

证法五　文献“钟朝艳．Cauchy 中值定理与 Taylor 定理的新证明．曲靖师专学报，1999，（3）．”给出了利用导数的定义与闭区间套定理证明 Cauchy 中值定理的一个新方法。

2.2.4　泰勒中值定理及其证明

定理 2.4（泰勒中值定理）

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶的导数，则对任意给定的

$x \in U(x_0)$，至少存在一点ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中ξ介于x_0与x之间，也可记为$\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，$0<\xi<1$。

证法一（通过构造辅助函数，利用柯西中值定理）

构造辅助函数

$$F(t)=f(x)-\left[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]$$

$$G(t)=(x-t)^{n+1}$$

所要证明的式子即

$$F(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}G(x_0) \quad 或 \quad \frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

不妨设$x_0<x$，则$F(t),G(t)$在$[x_0,x]$上连续，在(x_0,x)内可导，且

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n，\quad G'(t)=-(n+1)(x-t)^n\neq 0$$

又因$F(x)=G(x)=0$，所以由柯西中值定理得

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

关于泰勒中值定理的证明还有其他一些方法，例如以下几种证法。

证法二（通过构造辅助函数，利用罗尔中值定理）

可参见如下文献：

① 黄光武. 用罗尔定理证明泰勒中值定理. 重庆师范学院学报（自然科学版），2000，6.

② 蔡子华. 泰勒中值定理的又一证明. 工科数学，1992，(8).

证法三（利用导数的定义与闭区间套定理）

可参见文献：钟朝艳. Cauchy 中值定理与 Taylor 定理的新证明. 曲靖师专学报，1999，3.

证法四（利用积分中值定理和牛顿−莱布尼茨公式）

可参见文献：王文惠. 泰勒中值定理的证明与应用. 重庆商学院学报，1997，(3).

2.3　微分中值定理的相关内容分析

2.3.1　微分中值定理的背景

1．罗尔中值定理

罗尔中值定理的几何背景如图 2.1 所示。在每一点都可导的连续曲线上，如果

曲线两端点的高度相同，则至少存在一点的切线平行于 x 轴（有水平切线、该点的切线的斜率为 0）。

2．拉格朗日中值定理

（1）拉格朗日中值定理的几何背景见图 2.2

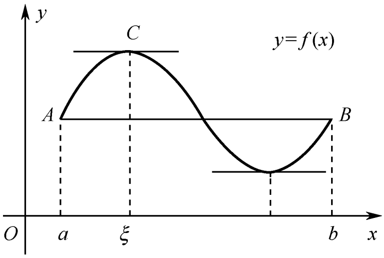


图 2.1

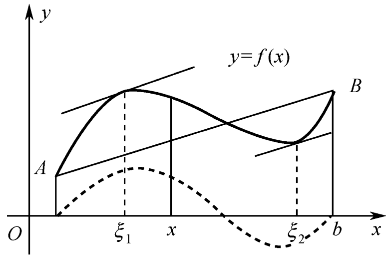


图 2.2

连接曲线两端点 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 的弦 AB 的斜率恰为曲线上某一点切线的斜率。

（2）拉格朗日中值定理的物理背景

① 如果把 $y=f(x)$ 看成质点做变速直线运动的位置函数，那么拉格朗日中值定理所揭示的是质点在时间段 $[a,b]$ 上的平均速度恰好可以用时间段 $[a,b]$ 内部某一时刻的瞬时速度来表示。

② 如果把 $y=f(x)$ 看成电流通过某一导线横截面的电量，x 表示时间，那么拉格朗日中值定理表示在 $(b-a)$ 这段时间内通过导线的平均电量（电流强度）恰好可以用时间段 $[a,b]$ 内部某一时刻的瞬时电流强度来表示。

③ 如果把 $y=f(x)$ 看成变力沿直线所做的功，x 表示位移，那么拉格朗日中值定理表示在位移长度为 $(b-a)$ 时的平均功率恰好可以用 (a,b) 内某一点的瞬时功率来表示。

3．柯西中值定理

（1）柯西中值定理的几何背景见图 2.3

曲线 C 由参数方程 $C:\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases}$，$t\in[a,b]$ 来描述，连接曲线两端点 $A(g(a),f(a))$ 与 $B(g(b),f(b))$ 的弦 AB 的斜率恰为曲线上某一点（对应参数为 ξ ）的切线的斜率 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\xi}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。如果在同一坐标平面上描绘出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图形（见图 2.3），$f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的增量分别为 Δf 和 Δg。则柯西中值定理揭示两函数在区间 $[a,b]$ 上的增量之比等于两曲线在 ξ 点的切线斜率之比。

（2）柯西中值定理的物理背景

如果把 $y=f(t)$ 和 $y=g(t)$ 都看成质点做变速直线运动的位置函数，那么柯西中

值定理所揭示的是质点在时间段$[a,b]$上的平均速度之比恰好等于时间段$[a,b]$内某一时刻ξ的瞬时速度之比。

4．泰勒中值定理

（1）泰勒中值定理的几何背景（见图 2.4）

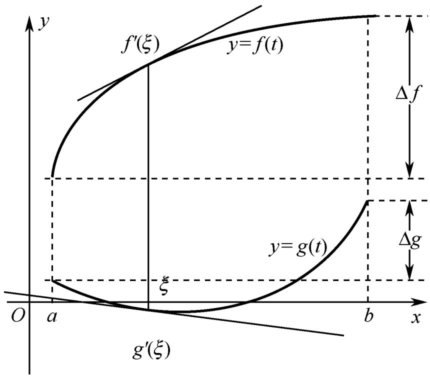


图 2.3

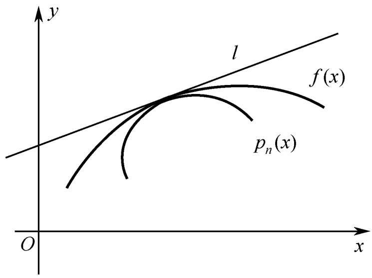


图 2.4

$f(x)$具有$(n+1)$阶导数，$p_n(x)$为n次多项式，设$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，若用多项式$p_n(x)$近似代替$f(x)$，首先要保证$f(x)$和$p_n(x)$在$x_0$点具有相同的函数值，即$f(x_0)=p_n(x_0)$；其次要使$p_n(x)$与$f(x)$吻合得更好，在$x_0$点$f(x)$和$p_n(x)$应具有相同的切线，即$f'(x_0)=p_n'(x_0)$；进一步要求$p_n(x)$与$f(x)$的凹凸性相同，即$f''(x_0)=p_n''(x_0)$等。满足上述要求的多项式$p_n(x)$是唯一的，也就是

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

（2）泰勒中值定理的物理背景

设$s=f(t)$和$s=p_n(t)$是两个质点的运动方程，则$f(t_0)=p_n(t_0)$表示两个质点的初始位置相同；$f(t_0)=p_n(t_0)$且$f'(t_0)=p_n'(t_0)$表示两个质点的初始位置相同且具有相同的初始速度；$f(t_0)=p_n(t_0)$、$f'(t_0)=p_n'(t_0)$及$f''(t_0)=p_n''(t_0)$表示两个质点的初始位置相同、具有相同的初始速度且具有相同的加速度。比较上述三种情形，在$t=t_0$附近质点运动的状态一种情形比一种情形更接近。

2.3.2 微分中值定理的条件与结论

1．罗尔中值定理

（1）罗尔中值定理的三个条件中，缺少其中任何一个条件，结论将不一定成立。如图 2.5 所示的几种情形分别讨论如下。

① $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$，在$[0,1]$上不满足定理的第一个条件，结论不成立；

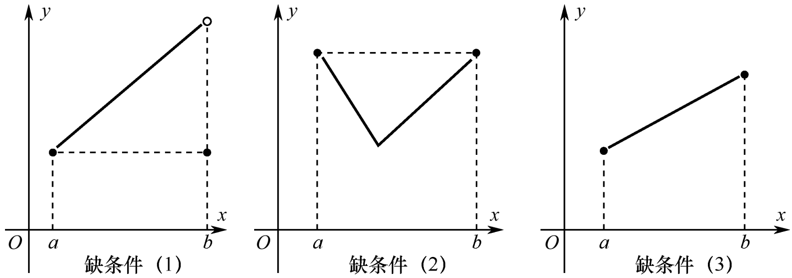


图 2.5

② $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2} \\ 1-x, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1 \end{cases}$，在 $[0,1]$ 上不满足定理的第二个条件，结论不成立；

③ $f(x)=x$，在 $[0,1]$ 上不满足定理的第三个条件，结论不成立。

（2）罗尔中值定理的条件是结论成立的充分但非必要条件，条件不满足时结论也有可能成立。举例如下：

① $f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{3\pi}{4} \\ x-\dfrac{3\pi}{4}, & \dfrac{3\pi}{4}\leqslant x<\pi \end{cases}$，在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 处不连续，也不可导且 $f(0)\neq f(\pi)$，即定理的三个条件均不满足，但在 $(0,\pi)$ 内仍然存在一点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 满足定理的结论；

② $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, -1\leqslant x<1 \\ 1, \quad x=1 \end{cases}$，在 $[-1,1]$ 上不满足罗尔定理的第一个和第三个条件，但是定理的结论对其却是成立的。

2．拉格朗日中值定理

函数在闭区间上连续、在开区间内可导是拉格朗日中值定理的充分但非必要条件，满足这两个条件，定理的结论一定成立，不满足这两个条件，定理的结论可能成立也可能不成立。

（1）$f(x)=\begin{cases} x^2, 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 3, 1<x\leqslant 2 \end{cases}$，在 $[0,2]$ 上不连续，在 $(0,2)$ 内不可导，但存在 $\xi=\dfrac{3}{4}$ 使得 $f'(\xi)=2\xi=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{3}{2}$。

（2）$f(x)=\dfrac{1}{x}$，在 $[-1,1]$ 上不连续，在 $(-1,1)$ 内不可导，$-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1$，而 $x^2=-1$ 无实根，即在 $(-1,1)$ 内不存在 ξ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$。

在满足拉格朗日中值定理的条件下，结论中的“至少存在”是关键所在。

实际上ξ是方程$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$的所有实数解中属于$(a,b)$内的那些解，这样的解不一定能解出，也不知有多少个，但这并不影响定理的应用，因为定理的重要性不在于一定要知道或者解出ξ，而是在于确定了ξ的存在性。

拉格朗日中值定理可表示为$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，称为拉格朗日公式，也称为微分中值公式，也可表示成：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad a<\xi<b\text{；}$$

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)]\cdot(b-a),\quad 0<\theta<1\text{；}$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)\cdot h,\quad 0<\theta<1\text{；}$$

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad (0<\theta<1)$$

所以，拉格朗日中值定理又称为有限增量定理。

3．柯西中值定理

柯西中值定理的条件为充分但非必要条件，满足这两个条件，定理的结论一定成立，不满足这两个条件，定理的结论可能成立也可能不成立。

（1）$f(x)=x^2,g(x)=x^3$，在$[-1,1]$上不满足柯西中值定理的条件（当$x=0$时，$f'(x)=g'(x)=0$），也不存在满足结论的ξ。

（2）$f(x)=x^2,g(x)=x$，在$[-1,1]$上不满足柯西中值定理的条件（当$x=0$时，$f'(x)=g'(x)=0$），却存在满足结论的$\xi=0$。

4．泰勒中值定理

泰勒中值定理的条件为充分但非必要条件，满足这两个条件，定理的结论一定成立，不满足这两个条件，定理的结论可能成立也可能不成立。

泰勒中值定理给出了用一个n次多项式表示函数$f(x)$的方法，并给出了多项式与函数$f(x)$之间的误差；上述公式又称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的n阶泰勒公式。

当$x_0=0$时，得

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

此公式称为$f(x)$带有拉格朗日型余项的n阶麦克劳林公式。

2.3.3　微分中值定理的意义与作用

要深刻地了解函数的性质，就必须进一步研究可导函数与其导数之间的关系，导数的定义就是描述函数在某一处的瞬时变化（率）状态，因此，函数的导数与其本身之间就存在着一定的关系，微分中值定理就深刻地揭示了它们的内在联系。微分中值定理是罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒中值定理的统称，下面通过比较来分析微分中值定理的意义与作用。

1．在理论上，函数在一定条件下、在给定的区间中存在一点 ξ（即中值），使得在此点的函数与导数在区间上存在着某种特定的等式关系

微分中值定理是微分学的重要理论基础，也是微分学研究函数形态的重要定理，它是沟通函数及其导数之间的桥梁，是应用导数研究函数在某点的局部性质和在某个区间上的整体性质的重要工具。通常应用导数研究函数的性质都要直接借助于中值定理，特别是导数的许多重要应用都是建立在中值定理的基础上的，许多理论性的证明都要用到中值定理，拉格朗日中值定理（也称为有限增量定理）在整个高等数学的教学中处于十分重要的地位。故学习中值定理要时刻把握定理的条件、结论、几何解释、证明方法、各定理之间的联系和应用等。通常，中值定理中中值 ξ 的值不易求出，即中值 ξ 的准确值常不易知道，但其存在性是肯定的，且不影响定理的应用价值和理论研究。

2．在形式结构上，罗尔定理是中值定理的基础

拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广，利用它可以研究函数在某一区间的几何性质，如单调性、凹凸性和极值等，利用它也可以证明假定一个函数的导数值在某一区间内恒为零，则该函数在该区间内必为一常数。

柯西中值定理是拉格朗日中值定理在变量上的一个推广。拉格朗日中值定理说明了函数对于自变量在一个区间内的平均变化率等于它在该区间内某一点处的瞬时变化率（导数），即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

而柯西中值定理说的却是一个函数对于另一个函数变化率的问题，因而就在变量的意义上包括了拉格朗日中值定理（即令 $g(x)=x$ 得到拉格朗日中值定理），这样就提供了解决不定式的有效方法——罗必达法则。柯西中值定理也可以看成含有参数形式的拉格朗日中值定理。

如果说柯西中值定理是拉格朗日中值定理在变量上的推广，那么泰勒中值定理不妨看成是拉格朗日中值定理在导数的阶数上的推广，换句话说，泰勒中值定理就是连续多次使用拉格朗日中值定理推出的结果，它不仅是在理论上利用微分法研究函数性质的基本解析工具（例如从几何上我们看到了三阶以下的导数与曲线的关系，还通过泰勒定理解析地看到了高阶导数与函数的关系），而且在实际计算函数值时也起了很大的作用。

拉格朗日中值定理给出了函数与其一阶导数的关系，而泰勒定理却给出了函数与其高阶导数之间的关系。因而，就导数的阶数上即令 $n=0$ 得拉格朗日中值定理，所以拉格朗日中值定理是泰勒定理的特例。

3．在定理的证明上，一般都是以罗尔定理为基础，构造一个新的函数（辅助函数），使之满足罗尔定理的条件

构造新的函数是证明各个定理的关键，而构造出的辅助函数必须结构简单且函

数与导数间必有一定的关系，还要满足罗尔定理的 3 个条件。如何构造辅助函数是分析问题和证明的难点和重点，一般来讲，构造辅助函数的方法并不是唯一的，其主要方法如下：

（1）解析法

从所需证明的结论分析入手，通过适当的方法来寻求辅助函数。

（2）图像法

从几何图形上进行分析，构造线性函数作为辅助函数。

2.3.4 四个微分中值定理之间的关系

微分中值定理是沟通函数及其导数之间的桥梁，其中罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理通常是联系函数与其一阶导数之间的桥梁，而泰勒中值定理通常是联系函数与其高阶导数之间的桥梁。

若在拉格朗日中值定理中令 $f(b)=f(a)$，则拉格朗日中值定理就变成了罗尔中值定理，即罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特殊情况。也可以说，拉格朗日中值定理是罗尔中值定理的推广。

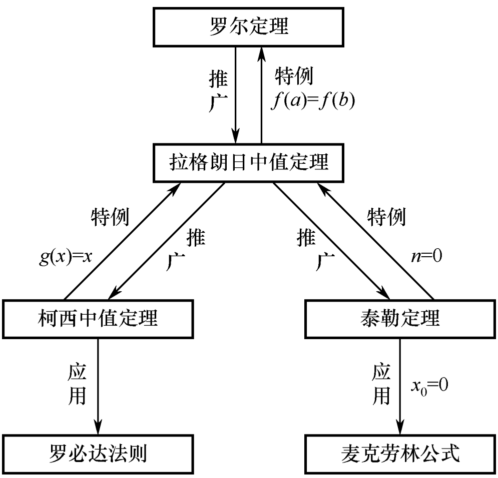


图 2.6

若在柯西中值定理中令 $g(x)=x$，则柯西中值定理就变成了拉格朗日中值定理，即拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情况。也可以说，柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广。

若在泰勒中值定理中令 $n=0$，则泰勒中值定理即为拉格朗日中值定理，所以拉格朗日中值定理是泰勒中值定理的特殊情况。也可以说，泰勒中值定理是拉格朗日中值定理向高阶导数方向的推广。

四个微分中值定理的关系可用图 2.6 表示。

2.3.5 微分中值定理的中值点

微分中值定理只是肯定了“中值点”的存在性问题，并没有论述“中值点”的其他性质，如“中值点”的个数问题，“中值点”的位置问题（极限性质、渐近性质），“中值点”的分析性质（单调性、连续性、可导性）等。

1．“中值点”的个数问题

结论 2.1 若函数 $f(x)$ 满足如下条件：

（1）在$[a,b]$上连续；

（2）在(a,b)内存在二阶导数；

（3） $\forall x\in(a,b)$， $f''(x)\neq 0$；

则在 (a,b) 存在唯一的一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

证明　由拉格朗日中值定理知，点 ξ 是存在的。下面证明点 ξ 是唯一的。

用反证法。假设存在 ξ_1,ξ_2 $(\xi_1<\xi_2)$ 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，由已知条件（2）知，$f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔中值定理，所以 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$，这与题设矛盾，得证。

结论 2.2　若函数 $f(x)$ 满足如下条件：

（1）在$[a,b]$上连续；

（2）在(a,b)内存在连续的二阶导数；

（3）在(a,b)内 $f''(x)=0$ 的根只有有限个（n 个）；

则在 (a,b) 内 $f(x)$ 的中值点也只有有限个（$n+1$ 个）。

证明　设在(a,b)内 $f''(x)=0$ 的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，则它们把区间 $[a,b]$ 分为 $n+1$ 个小区间：$[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],[x_n,b]$。

由拉格朗日中值定理知，$f(x)$ 在每个小区间内的中值点存在，又由 $f''(x)$ 的连续性知，$f''(x)$ 在每个小开区间内都不变号，即 $f''(x)>0$ 或 $f''(x)<0$。

根据结论 2.1 得，$f(x)$ 在每个小开区间内都有唯一的一个中值点，得证。

由结论 2.2，我们很自然地想到，是否当 $f''(x)=0$ 的根有无限多个时，$f(x)$ 的中值点就有无限多个呢？

通过下面的两个题目，可知答案是否定的。

（1）函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 1, & 0<x\leqslant 1\\ (x-1)^3+1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，其曲线如图 2.7 所示，$f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上有连续的二阶导数，且当 $x\in(0,1)$ 时有 $f''(x)\equiv 0$，即 $f''(x)=0$ 的根有无限多个；但函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 的中值点仅有 $\xi_1=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$，$\xi_2=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 两个。

（2）函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, 0<x\leqslant\dfrac{1}{\pi}\\ 0, \quad x=0\end{cases}$，其曲线如图 2.8 所示，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right)$ 内有连续的二阶导数 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^3}\sin\dfrac{1}{x}$，令 $f''(x)=0$ 可得 $x=\dfrac{1}{k\pi}(k=2,3,\cdots)$，即 $f''(x)=0$ 的根有无限多个，由曲线知其中值点也有无限个。

由上面的两个例子，可以看出判断中值点是否有限的情形是很复杂的，有兴趣的读者可以做进一步的研究。但由结论 2.2 的逆否命题可得中值点无限的必要条件。

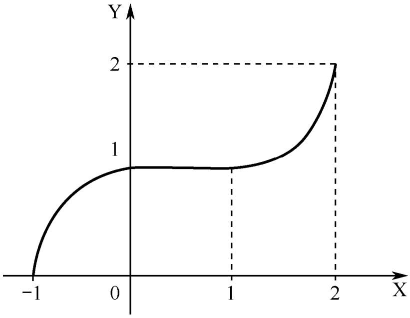


图 2.7

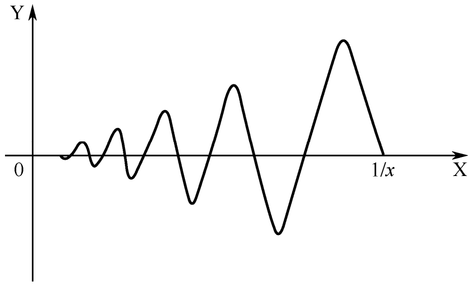


图 2.8

结论 2.3 若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内存在连续的二阶导数，且 $f(x)$ 的中值点有无限个，则 $f''(x)=0$ 的根有无限个。

结论 2.4 若函数 $f(x)$ 满足如下条件：

（1）在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导；

（2）在(a,b)内的任何子区间上为非线性函数；

（3）方程 $f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)=0$ 在 (a,b) 内有 $n-1$ 个根；

则在 (a,b) 内存在有限个（不少于 n 个）点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明 先证 ξ 个数的有限性。

由于 $f(x)$ 在 $\forall(c,d)\subset(a,b)$ 内为非线性可导函数，因此至多存在有限个 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

由 (c,d) 的任意性知，在(a,b)内满足结论的 ξ 只有有限个。

再证 ξ 的最少个数为 n。

设在 (a,b) 内方程 $f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)=0$ 的 $n-1$ 个根分别为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}$，且 $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{n-1}$，则它们把区间 $[a,b]$ 分为 n 个小区间 $[a,\xi_1]$, $[\xi_1,\xi_2],\cdots,[\xi_{n-1},b]$，令

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$$

则 $F(x)$ 在每一个小区间满足罗尔定理，即在 $F(x)$ 在每一个小区间内都至少存在一个点 ξ，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

故在 (a,b) 内至少存在 n 个点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

如果增加 $f(b)=f(a)$ 的条件，可以得到罗尔中值定理“中值点”的个数，关于

柯西中值定理“中值点”的个数问题，有兴趣的读者可以做进一步的研究。

2．“中值点”的渐近性质

中值定理中“中值点”随着区间长度的改变而变化的性质，称为“中值点”的渐近性。

（I）拉格朗日中值定理中“中值点”的渐近性质

结论 2.5　若函数 $f(t)$ 满足如下条件：

（1）在$[a,x]$上连续；

（2）在(a,x)内存在连续的二阶导数；

（3）$f''(a)$ 存在且 $f''(a)\neq 0$；

则拉格朗日中值定理 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 中的“中值点”ξ 满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

证明　令

$$\varPhi(x)=\frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}$$

由罗比达法则和 $f''(a)$ 存在得

$$\lim_{x\to a}\varPhi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}f''(a) \tag{$*$}$$

因为 $\xi\in(a,x)$，由拉格朗日中值定理有 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$，所以

$$\varPhi(x)=\frac{f'(\xi)(x-a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}=\frac{f'(\xi)-f'(a)}{x-a}$$

故又可得

$$\lim_{x\to a}\varPhi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)-f'(a)}{\xi-a}\cdot\frac{\xi-a}{x-a}\quad（x\to a\text{ 时 }\xi\to a） \tag{$**$}$$

$$=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)-f'(a)}{\xi-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=f''(a)\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}$$

比较式（$*$）、式（$**$）得 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\dfrac{1}{2}$。

注 1　结论 2.5 说明当区间的长度充分小时，拉格朗日中值定理的中值点 ξ 趋向于区间的中点。

注 2　如果结论 2.5 中的条件（3）不满足，则结论不一定成立，见下面两例。

① 函数 $f(x)=x^{3/2}$，在 $[a,x]=[0,b](b>0)$ 上满足结论 2.5 的前两个条件，但 $f''(0)$ 不存在，不难求出拉格朗日中值定理中的“中值点”$\xi=\dfrac{4}{9}b$，有

$$\lim_{b\to 0}\frac{\xi-a}{x-a}=\lim_{b\to 0}\frac{\frac{4}{9}b-0}{b-0}=\frac{4}{9}$$

② 函数 $f(x)=x^3$，在 $[a,x]=[0,b](b>0)$ 上满足结论 2.5 的前两个条件，但 $f''(0)=0$，不难求出拉格朗日中值定理中的“中值点” $\xi=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$，有

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\lim_{b\to 0}\frac{\dfrac{b}{\sqrt{3}}-0}{b-0}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

对于不满足结论 2.5 中的条件（3）的函数，有下面的结论 2.6。

结论 2.6 若函数 $f(t)$ 满足如下条件：

（1）在$[a,x]$上连续；

（2）在(a,x)内存在连续的二阶导数；

（3） $f''(a)=0$ 但 $f(t)$ 在$[a,x]$上存在三阶连续导数且 $f'''(a)\neq 0$；

则拉格朗日中值定理 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 中的“中值点” ξ 满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

证明 令 $$\Phi(x)=\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2}{(x-a)^3}$$

由罗比达法则和 $f'(x)$ 的泰勒公式

$$f'(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2+o((x-a)^2)$$

得 $$\lim_{x\to a}\Phi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)}{3(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2+o((x-a)^2)}{3(x-a)^2}=\frac{f'''(a)}{3!} \qquad ①$$

又由 $f(x)$ 的拉格朗日中值定理 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$ 得

$$\lim_{x\to a}\Phi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)(x-a)-f'(a)(x-a)-\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2}{(x-a)^3}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{[f'(\xi)-f'(a)]-\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)}{(x-a)^2}$$

其中 $a<\xi<x$，当 $x\to a$ 时 $\xi\to a$。

再把 $f'(\xi)$ 的泰勒公式

$$f'(\xi)=f'(a)+f''(a)(\xi-a)+\frac{f'''(a)}{2!}(\xi-a)^2+o((\xi-a)^2)$$

代入得

$$\lim_{x\to a}\Phi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f''(a)(\xi-a)+\dfrac{f'''(a)}{2!}(\xi-a)^2+o((\xi-a)^2)-\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)}{(x-a)^2}\quad（由 f''(a)=0）$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f'''(a)}{2!}(\xi-a)^2+o((\xi-a)^2)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2!}f'''(a)\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^2 \qquad ②$$

比较式①、式②得 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\xi-a}{x-a}\right)^2=\dfrac{1}{3}$，即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

同样道理，我们可以得到结论 2.7。

结论 2.7　若函数 $f(t)$ 满足如下条件：

（1）在$[a,x]$上连续；

（2）在(a,x)内存在连续的 $n+1$ 阶导数；

（3） $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0$ 但 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$，

则拉格朗日中值定理 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 中的“中值点”ξ 满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$$

注 1　结论 2.7 说明，当 n 充分大时，拉格朗日中值定理的中值点 ξ 趋向于区间的右端点。

注 2　结论 2.7 的详细证明可参见：陈新一，唐文玲. 关于 Lagrange 中值定理‘中值点’的渐近性. 甘肃教育学院学报（自然科学版），1993，3.

如果把拉格朗日中值定理的结论写成 $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))\cdot(b-a)$，$(0<\theta<1)$，可得上面的类似结果，我们通过以下几个例题说明。

例 1　设 $f(x)=\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$，在 $[x,x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta}}$$

证明 $\dfrac{1}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta=\dfrac{1}{2}$。

证明　$f(x)$ 在 $[x,x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta}}$$

求出 θ 得

$$\theta=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{2}=\frac{1}{4}+\frac{x}{2(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

所以 $\dfrac{1}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{1}{2}$，从而

$$\lim_{x\to 0^+}\theta=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{4}+\frac{x}{2(\sqrt{x^2+x}+x)}\right]=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\theta=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{x}{2(\sqrt{x^2+x}+x)}\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

例 2 设 $f(x)$ 在 a 点附近二次可导，且 $f''(a)\neq 0$，由微分中值定理可得

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\ 0<\theta<1$$

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$。

证明 由泰勒公式知

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$$

与已知等式比较整理得

$$f'(a+\theta h)-f'(a)=\frac{f''(a)}{2}h+o(h)$$

应用拉格朗日定理得 $f''(a+\theta_1\theta h)\theta h=\dfrac{f''(a)}{2}h+o(h)$

即

$$\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(a)}{f''(a+\theta_1\theta h)}+\frac{o(1)}{f''(a+\theta_1\theta h)}$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

例 3 设 $f(x)$ 在点 a 附近有 $n+1$ 阶连续导数且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$，又

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n,\ 0<\theta<1$$

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

证明 由泰勒公式知

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

与已知等式比较得

$$f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)$$

上式左边应用拉格朗日中值定理得

$$f^{(n+1)}(a+\theta_2\theta h)\theta h=\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)$$

所以 $$\theta=\frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)}{f^{(n+1)}(a+\theta_2\theta h)}\to\frac{1}{n+1}$$

例 4　设 $f(x)$ 在 a 点附近有 $n-1$ 阶连续导数，且

$$f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0, f^{(n)}(a)\neq 0$$

由微分中值定理 $$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\ 0<\theta<1$$

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=n^{-\frac{1}{n-1}}$。

证明　由泰勒公式知

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+o(h^n)$$

$$=f(a)+f'(a)h+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+o(h^n)$$

与已知等式比较整理得

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^{n-1}+o(h^{n-1})$$

上式两边对 h 求 $n-1$ 阶导数得

$$f^{(n)}(a+\theta h)\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}(a)}{n}+o(1)$$

所以 $$\theta^{n-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a+\theta h)}+\frac{o(1)}{f^{(n)}(a+\theta h)}$$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\theta^{n-1}=\frac{1}{n}$，即 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=n^{-\frac{1}{n-1}}$。

（II）柯西中值定理中“中值点”的渐近性质

柯西中值定理中“中值点”的渐近性质与拉格朗日中值定理中“中值点”的渐近性质相类似，见下面的结论 2.8。

结论 2.8　若函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 满足如下条件：

（1）在$[a,x]$上连续；

（2）在$[a,x]$内二阶可导且二阶导数在 a 点右连续；

（3）在$[a,x]$内 $g'(t)\neq 0$；

（4）$g'(a)f''(a)-f'(a)g''(a)\neq 0$，

则柯西中值定理 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ 中的“中值点”ξ 满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

证明　令 $$\Phi(x)=\frac{g'(a)[f(x)-f(a)]-[g(x)-g(a)]f'(a)}{(x-a)^2}$$

由罗比达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\Phi(x)&=\lim_{x\to a}\frac{g'(a)f'(x)-g'(x)f'(a)}{2(x-a)}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{g'(a)[f'(x)-f'(a)]-[g'(x)-g'(a)]f'(a)}{x-a}\\&=\frac{1}{2}\left[g'(a)\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}-f'(a)\lim_{x\to a}\frac{g'(x)-g'(a)}{x-a}\right]\\&=\frac{1}{2}[g'(a)f''(a)-f'(a)g''(a)]\end{aligned}\qquad ①$$

通过对 $\Phi(x)$ 变形并应用柯西中值定理 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$，又可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\Phi(x)&=\lim_{x\to a}\frac{g'(a)\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-f'(a)}{x-a}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\&=g'(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(a)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-f'(a)}{x-a}\\&=g'(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g'(\xi)}\cdot\frac{g'(a)f'(\xi)-f'(a)g'(\xi)}{x-a}\\&=g'(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g'(\xi)}\cdot\left[\lim_{x\to a}g'(a)\frac{f'(\xi)-f'(a)}{x-a}-f'(a)\lim_{x\to a}\frac{g'(\xi)-g'(a)}{x-a}\right]\\&=g'(a)\cdot\frac{1}{g'(a)}\cdot\left[\lim_{\xi\to a}g'(a)\frac{f'(\xi)-f'(a)}{\xi-a}-f'(a)\lim_{\xi\to a}\frac{g'(\xi)-g'(a)}{\xi-a}\right]\cdot\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}\\&=\left[g'(a)f''(a)-f'(a)g''(a)\right]\cdot\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}\end{aligned}\qquad ②$$

比较式①、②得 $\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}$。

类似可得，如下结论 2.9、结论 2.10（证明详见：徐辉．关于柯西中值定理“中值 ξ ”的渐近性．华东地质学院学报，1994，9）。

结论 2.9 若函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 满足如下条件：

（1）在$[a,x]$上连续；

（2）在$[a,x]$内三阶可导且三阶导数在 a 点右连续；

（3）在$[a,x]$内 $g'(t)\neq 0$；

（4） $f''(a)=g''(a)=0$ 且 $g'(a)f'''(a)-f'(a)g'''(a)\neq 0$，

则柯西中值定理 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ 中的“中值点” ξ 满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

结论 2.10 若函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 满足如下条件：

（1）在$[a,x]$上连续；

（2）在$[a,x]$内有$n+1$阶导数且在a点右连续；

（3）在$[a,x]$内$g'(t)\neq 0$；

（4）$f^{(i)}(a)=g^{(i)}(a)=0,(i=2,3,\cdots,n)$且$g'(a)f^{(n+1)}(a)-f'(a)g^{(n+1)}(a)\neq 0$，

则柯西中值定理$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$中的“中值点”$\xi$满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$$

（3）泰勒中值定理中“中值点”的渐近性质

结论 2.11　若函数$f(t)$在$[a，x]$上有直到n阶的连续导数，$f^{(n+1)}(a)$存在且$f^{(n+1)}(a)\neq 0$，则泰勒中值定理

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

中的“中值点”ξ满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{n+1}$$

证明　将带佩亚诺余项的泰勒公式

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+o((x-a)^{n+1})$$

与泰勒中值定理

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

相比较得

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+o((x-a)^{n+1})$$

所以

$$\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(a)}{x-a}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}+\frac{o((x-a)^{n+1})}{(x-a)^{n+1}}$$

即
$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(a)}{x-a}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}$$

而
$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(a)}{x-a}=\lim_{\xi\to a}\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(a)}{\xi-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=f^{(n+1)}(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}$$

故得
$$\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}=f^{(n+1)}(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}$$

即$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\dfrac{1}{n+1}$。

注 1　结论 2.11 就是泰勒中值定理中“中值点”的渐近性质，当$n=1$时，就是

拉格朗日中值定理的中值点的渐近性质。

3．“中值点”的分析性质

结论 2.12 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，$f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调，则拉格朗日中值定理 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 中的“中值点” $\xi=\xi(x)$ 是 x 的单值函数，也是 x 的单调增加函数。

证明 由 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调知 $\xi=\xi(x)$ 是 x 的单值函数，下面证明 $\xi=\xi(x)$ 是 x 的单调增加函数。

不妨设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增，对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$ 有

$$f(x_1)-f(a)=f'[\xi(x_1)](x_1-a),f(x_2)-f(a)=f'[\xi(x_2)](x_2-a)$$

$$f(x_2)-f(x_1)=\{f'[\xi(x_2)]-f'[\xi(x_1)]\}(x_1-a)+f'[\xi(x_2)](x_2-x_1)$$

又因为
$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\eta)(x_2-x_1)$$

故
$$\{f'(\eta)-f'[\xi(x_2)]\}(x_2-x_1)=\{f'[\xi(x_2)]-f'[\xi(x_1)]\}(x_1-a)$$

其中 $x_1<\eta<x_2,a<\xi(x_1)<x_1,a<\xi(x_2)<x_2,a<x_1<x_2<b$ 。

因为 $f'(x)$ 单调递增，所以 $f'(\eta)>f'[\xi(x_2)]$ ，则

$$\begin{aligned}&\{f'(\eta)-f'[\xi(x_2)](x_2-a)=f'(\eta)(x_2-x_1)+f'(\eta)(x_1-a)-\\&f'[\xi(x_2)](x_2-a)>f'(\eta)(x_2-x_1)+f'[\xi(x_1)](x_1-a)-f'[\xi(x_2)](x_2-a)\end{aligned}$$

而
$$f'(\eta)(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1)\,,$$

$$f'[\xi(x_1)](x_1-a)=f(x_1)-f(a)\,,$$

$$f'[\xi(x_2)](x_2-a)=f(x_2)-f(a)$$

所以
$$\{f'(\eta)-f'[\xi(x_2)]\}(x_2-a)>0\,,$$

$$f'(\eta)-f'[\xi(x_2)]>0\,,$$

$$f'[\xi(x_2)]-f'[\xi(x_1)]>0$$

由 $f'(x)$ 单调递增可知 $\xi(x_2)>\xi(x_1)$ ，证毕。

结论 2.13 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，$f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶连续导数且 $f''(x)$ 在 (a,b) 内保号（恒正或恒负），则拉格朗日中值定理 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 中的“中值点” $\xi=\xi(x)$ 是 x 的连续函数，也是 x 的可导函数，其导数为

$$\xi'(x)=\frac{f'(x)-f'[\xi(x)]}{(x-a)f''[\xi(x)]}$$

证明 由已知条件知

$$f'[\xi(x)]=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

$$f'[\xi(x+h)]=\frac{f(x+h)-f(a)}{x+h-a},$$

$$f'[\xi(x+h)]-f'[\xi(x)]=\frac{(x-a)[f(x+h)-f(a)]-h[f(x)-f(a)]}{(x+h-a)(x-a)}$$

由结论 2.12 知 $\xi=\xi(x)$ 是 x 的单调函数，当 $h\neq 0$ 时，有

$$f'[\xi(x+h)]-f'[\xi(x)]=f''(\eta)[\xi(x+h)-\xi(x)]$$

其中 η 介于 $\xi(x+h),\xi(x)$ 之间。从而有

$$\xi(x+h)-\xi(x)=\frac{(x-a)[f(x+h)-f(a)]-h[f(x)-f(a)]}{f''(\eta)(x+h-a)(x-a)}\to 0,(h\to 0)$$

故 $\xi=\xi(x)$ 在 (a,b) 内连续。则

$$\xi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\xi(x+h)-\xi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x-a)\dfrac{f(x+h)-f(a)}{h}-[f(x)-f(a)]}{f''(\eta)(x+h-a)(x-a)}$$

$$=\frac{(x-a)f'(x)-[f(x)-f(a)]}{f''[\xi(x)](x-a)^2}=\frac{(x-a)f'(x)-f'[\xi(x)](x-a)}{f''[\xi(x)](x-a)^2}$$

$$=\frac{f'(x)-f'[\xi(x)]}{f''[\xi(x)](x-a)}$$

结论 2.14　若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，且 $g'(x)\neq 0$，$f''(x)\ g'(x)-f'(x)g''(x)$ 在 (a,b) 内保号（恒正或恒负），则柯西中值定理 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ 中的“中值点” $\xi=\xi(x)$ 是 x 的单值连续函数，也是 x 的可导函数，其导数为

$$\xi'(x)=\frac{f'(x)g'[\xi(x)]-f'[\xi(x)]g'(x)}{(x-a)\{f''[\xi(x)]g'[\xi(x)]-f'[\xi(x)]g''[\xi(x)]\}}$$

证明　记

$$\varphi(x)=\frac{f'(x)}{g'(x)},a<x<b$$

于是

$$\varphi'(x)=\frac{f''(x)g'(x)-f'(x)g''(x)}{[g'(x)]^2}$$

由已知条件知 $\varphi(x)$ 是 x 的单调函数，从而得知 $\xi=\xi(x)$ 是 x 的单值函数，则

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(a)}{g(x+\Delta x)-g(a)}-\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'[\xi(x+\Delta x)]}{g'[\xi(x+\Delta x)]}-\frac{f'[\xi(x)]}{g'[\xi(x)]}$$

$$=\frac{f''(\eta)g'(\eta)-f'(\eta)g''(\eta)}{[g'(\eta)]^2}[\xi(x+\Delta x)-\xi(x)],\ \Delta x\neq 0$$

其中 η 介于 $\xi(x),\xi(x+\Delta x)$ 之间。

当 $\Delta x\to 0$ 时，显然有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\xi(x+\Delta x)-\xi(x)]=0$，即 $\xi=\xi(x)$ 是 x 的连续函数。故

$$\xi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\xi(x+\Delta x)-\xi(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g'(\eta)]^2}{f''(\eta)g'(\eta)-f'(\eta)g''(\eta)}\cdot\frac{[f(x+\Delta x)-f(a)][g(x)-g(a)]-[f(x)-f(a)][g(x+\Delta x)-g(a)]}{\Delta x[g(x+\Delta x)-g(a)][g(x)-g(a)]}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{g'[\xi(x)]\}^2\cdot\{f'(x)[g(x)-g(a)]-g'(x)[f(x)-f(a)]\}}{[g(x)-g(a)]^2\{f''[\xi(x)]g'[\xi(x)]-f'[\xi(x)]g''[\xi(x)]\}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)g'[\xi(x)]-f'[\xi(x)]g'(x)}{(x-a)\{f''[\xi(x)]g'[\xi(x)]-f'[\xi(x)]g''[\xi(x)]\}}$$

结论 2.15 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有直到 $n+1$ 阶的导数，且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内严格单调，则泰勒中值定理 $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ 中的“中值点” $\xi=\xi(x)$ 是 x 的单值函数，也是 x 的单调增加函数。

结论 2.16 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有直到 $n+2$ 阶的连续导数，且 $f^{(n+2)}(x)$ 在 (a,b) 内不变号，则泰勒中值定理中的“中值点” $\xi=\xi(x)$ 是 x 的连续函数，也是 x 的可导函数，其导数为

$$\xi'(x)=\frac{(n+1)!}{f^{(n+2)}(\xi(x))(x-a)^{n+2}}\left[f(x)(x-a)-(n+1)f(x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1-k}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k\right]$$

注 1 结论 2.15、结论 2.16 的证明详见：时统业，谢井，李鼎．论泰勒中值定理“中间点”的性质．大学数学，2012，(8)．

2.4 微分中值定理的应用

2.4.1 罗尔中值定理的应用

1．利用罗尔中值定理、费马定理、零点存在定理研究方程的根

研究方程根的问题时，常用如下结论：

（1）连续函数的根的存在性定理：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根。

（2）罗尔中值定理：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根。

（3）费马定理：设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域上有定义，且在 x_0 点可导，若 x_0 点为 $f(x)$ 的极值点，则 x_0 为方程 $f'(x)=0$ 的一个根。

例 2.1 证明下列各题：

（1）证明方程 $5x^4-4x+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

（2）设 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为满足 $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$ 的实数，证明方程 a_0+

$a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

（3）证明三次方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

（4）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a>0$，证明方程 $2x[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一个根。

证明　（1）令

$$F(x)=x^5-2x^2+x$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$，故由罗尔定理得，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即方程 $5x^4-4x+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

（2）构造函数　$f(x)=a_0x+\dfrac{a_1}{2}x^2+\dfrac{a_2}{3}x^3+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又

$$f(0)=0，\quad f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

故由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$，即 $f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根，

又

$$f'(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n$$

所以方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

（3）设 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$，在 $[0,1]$ 上应用罗尔定理即可。

（4）令　$F(x)=[f(b)-f(a)]x^2-(b^2-a^2)f(x)$

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又

$$F(a)=f(b)a^2-b^2f(a)=F(b)$$

根据罗尔中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$F'(\xi)=2\xi[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)f'(\xi)=0$$

即在 (a,b) 内方程 $2x[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(x)$ 至少存在一个根 ξ。

例 2.2　证明下列各题：

（1）方程 $x^3-3x+c=0$（c 是常数）在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根；

（2）方程 $x^n+px+q=0$（n 为正整数，p,q 为实数）当 n 为偶数时至多有两个实根；当 n 为奇数时至多有三个实根。

（3）设多项式 $P(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 n 个根（计算重根），则 $P^{(k)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 $n-k$ 个根。

（4）设勒让德多项式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]$，证明方程 $P_n(x)=0$ 在 $(-1,1)$ 内恰有 n 个相异实根。

（5）设 a,b,c 为实数，求证方程 $ax^2+bx+c=\mathrm{e}^x$ 至多有三个实根。

（6）证明方程 $2^x-x^2-1=0$ 有且仅有三个不同的实根。

（7）设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，当 $x>a$ 时 $f'(x)>k>0$，其中 k 为常数，又 $f(a)<0$，

证明方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a+\dfrac{|f(a)|}{k}\right)$ 内有唯一实根。

证明 （1）设 $f(x)=x^3-3x+c$，假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有两个不同的实根 $x_1<x_2$，$f(x_1)=f(x_2)=0$，则由罗尔定理知 $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$ 使 $f'(\xi)=0$；而 $f'(x)=3x^2-3$ 在 $(0,1)$ 内无根。

（2）设
$$f(x)=x^n+px+q$$
假设当 n 为偶数时有三个不同实根 $x_1<x_2<x_3$，则由罗尔定理知 $\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$, $\xi_2\in(x_2,x_3)$，使
$$f'(\xi_1)=n\xi_1^{n-1}+p=0,\quad f'(\xi_2)=n\xi_2^{n-1}+p=0$$
即 $\xi_1^{n-1}=\xi_2^{n-1}$, 而 $\xi_1\neq\xi_2$。

由于 $n-1$ 为奇数，故上式不可能成立。

假设当 n 为奇数时有四个不同实根 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则由罗尔定理知 $\exists\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$, 使
$$f'(\xi_i)=n\xi_i^{n-1}+p=0,\quad i=1,2,3$$
即 $\xi_1^{n-1}=\xi_2^{n-1}=\xi_3^{n-1}$, 而 $\xi_1<\xi_2<\xi_3$, 这是不可能的。

（3）设 $x_i\in[a,b], i=1,2,\cdots,j$ 为 $p(x)=0$ 的根，其重数分别为 $n_i, i=1,2,\cdots,j$，$\sum\limits_{i=1}^{j}n_i=n$，即
$$p(x)=(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_j)^{n_j}q_0(x)$$
$q_0(x)$ 为另一多项式且 $q_0(x_i)\neq0$，而
$$p'(x)=(x-x_1)^{n_1-1}(x-x_2)^{n_2-1}\cdots(x-x_j)^{n_j-1}q_1(x)$$
$q_1(x)$ 为另一多项式且 $q_1(x_i)\neq0$，于是 $x_i\in[a,b], i=1,2,\cdots,j$ 为 $p'(x)=0$ 的 $n_1-1,n_2-1,\cdots,n_j-1$ 重根，另外由罗尔定理知 $\exists\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{j-1}\subset(a,b)$ 使
$$p'(\xi_i)=0, i=1,2,\cdots,j-1$$
因此 $p'(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上根的个数至少为
$$(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_j-1)+j-1=n-1$$
亦即 $p'(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上有 $n-1$ 个根。

重复使用上述方法可知 $P^{(k)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 $n-k$ 个根。

（4）设 $g(x)=(x^2-1)^n$，则 $-1,1$ 分别为 $g(x)$ 的 n 重零点，可用数学归纳法证明。

当 $1\leqslant k\leqslant n$，$g^{(k)}(x)$ 有 $-1,1$ 为其 $n-k$ 重零点，而 $-1<\xi_1^{(k)}<\xi_2^{(k)}<\cdots<\xi_k^{(k)}<1$ 为 $g^{(k)}(x)$ 的单重零点，于是 $g^{(n)}(x)$ 有 n 个单重零点且全在 $(-1,1)$ 内。

（5）假设方程 $f(x)=ax^2+bx+c-\mathrm{e}^x=0$ 有四个实根，则由罗尔定理知
$$f'(x)=2ax+b-\mathrm{e}^x=0,$$
$$f''(x)=2a-\mathrm{e}^x=0$$

分别有三个和两个实根，但 $f''(x)=2a-\mathrm{e}^x=0$ 不可能有两个实根。

（6）设 $f(x)=2^x-x^2-1$，因 $f(0)=f(1)=0$，所以 $x=0,x=1$ 为方程的两个根；又 $f(3)<0,f(5)>0$，所以由零点存在定理知，方程在 $(3,5)$ 内至少有一个根 ξ。

假设还有根 ξ_1，不妨设 $\xi_1<\xi$，函数 $f(x)=2^x-x^2-1$ 在 $[0,1],[1,\xi],[\xi,\xi_1]$ 上都满足罗尔定理，可得

$$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=f'(\eta_3)=0$$

又 $f'(x)=2^x\ln 2-2x$ 在 $[\eta_1,\eta_2],[\eta_2,\eta_3]$ 上满足罗尔定理，可得

$$f''(\zeta_1)=f''(\zeta_2)=0$$

即方程 $f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2=0$ 有两个实根，矛盾！（因方程 $f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2=0$ 只有一个实根 $x=\dfrac{\ln 2-2\ln(\ln 2)}{\ln 2}$）。

（7）由 $f'(x)>k>0$ 知 $f(x)$ 递增，因此至多有一个实根；又由拉格朗日中值定理得

$$f\left(a+\frac{|f(a)|}{k}\right)=f(a)+f'(\xi)\frac{|f(a)|}{k}>f(a)+k\frac{|f(a)|}{k}=f(a)+|f(a)|>0$$

而 $f(a)<0$，故由零点存在定理知至少有一个实根。从而得证。

2．利用罗尔中值定理证明含有中值点的等式

例 2.3　证明下列各题：

（1）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，$g(x)\neq 0,x\in[a,b]$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)g(\xi)=g'(\xi)f(\xi)$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且满足 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0$，求证至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$；

（3）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$；

（4）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，而当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$，证明对任意自然数 n，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\dfrac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$；

（5）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 a,b 同号，证明存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}=f(c)-cf'(c)$；

（6）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证：对任意的 λ，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=\lambda$；

（7）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)f(b)>0,\ f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，试证对任意实数 k，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$；

（8）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$g''(x)\neq 0$, 且 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：①在 (a,b) 内，$g(x)\neq 0$；②存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。

证明 （1）构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$。

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$，而

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

故由 $F'(\xi)=0$ 可得 $f'(\xi)g(\xi)=g'(\xi)f(\xi)$。

（2）由 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,\mathrm{d}x=0$，根据积分中值定理得存在 $\xi_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 使得

$$f(1)-\xi_1 f(\xi_1)=0$$

即 $f(1)=\xi_1 f(\xi_1)$。

构造函数 $F(x)=xf(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[\xi_1,1]$ 上连续，在 $(\xi_1,1)$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，又

$$F(1)=1\cdot f(1)=f(1)=\xi_1 f(\xi_1)=F(\xi_1)$$

故由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

亦即 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

（3）做辅助函数

$$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=f(a)\mathrm{e}^{g(a)}=0, F(b)=f(b)\mathrm{e}^{g(b)}=0$$

故由罗尔定理可得，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$F'(\xi)=f'(\xi)\mathrm{e}^{g(\xi)}+f(\xi)\mathrm{e}^{g(\xi)}g'(\xi)=0$$

即 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$。

（4）做辅助函数

$$F(x)=f^n(x)\cdot f(1-x)$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且由 $f(0)=0$ 知 $F(0)=F(1)=0$。故由罗尔定理可得，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$F'(\xi)=nf^{n-1}(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-f^n(\xi)f(1-\xi)=0$$

即 $\dfrac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$。

（5）**证法一**

因 a,b 同号，故 $c\neq 0$，可将所证结论变为

$$\frac{af(b)-bf(a)}{(b-a)c^2}-\frac{f(c)-cf'(c)}{c^2}=0$$

亦即
$$\left[\frac{af(b)-bf(a)}{(b-a)x}-\frac{f(x)}{x}\right]'_{x=c}=0$$

故可构造函数 $F(x)=\dfrac{af(b)-bf(a)}{(b-a)x}-\dfrac{f(x)}{x}$

在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理即可证出。

证法二

令常数
$$k=\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}$$

并变形为
$$\frac{f(b)-k}{b}=\frac{f(a)-k}{a}$$

构造函数
$$F(x)=\frac{f(x)-k}{x}$$

在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理即可证出。

证法三

将所证的等式变为
$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=cf'(c)-f(c)$$

构造函数
$$F(x)=\frac{f(x)}{x},G(x)=\frac{1}{x}$$

在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理即可证出。

（6）构造函数
$$F(x)=\mathrm{e}^x f(x)-\mathrm{e}^x\cdot\lambda$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$F(a)=F(b)=0$。故由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即
$$\mathrm{e}^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]-\mathrm{e}^{\xi}\cdot\lambda=0$$

所以 $f'(\xi)+f(\xi)=\lambda$。

（7）要证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$，将两边同乘 $\mathrm{e}^{-k\xi}$ 得
$$\mathrm{e}^{-k\xi}f'(\xi)-k\mathrm{e}^{-k\xi}f(\xi)=0$$

即证
$$[\mathrm{e}^{-kx}f(x)]'|_{x=\xi}=0$$

为此构造函数
$$F(x)=\mathrm{e}^{-kx}f(x)$$

不妨设 $f(a)>0,则f(b)>0,\ f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，又因 $\mathrm{e}^{-kx}>0$，故有
$$F(a)>0,F(b)>0,F\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$$

由连续函数的介值定理知，$\exists x_1,x_2$ 使 $F(x_1)=F(x_2)=0$ 且 $a<x_1<\dfrac{a+b}{2}<x_2<b$，

于是$F(x)$在$[x_1,x_2]$上满足罗尔定理的条件，故存在$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即

$$\mathrm{e}^{-k\xi}f'(\xi)-k\mathrm{e}^{-k\xi}f(\xi)=0$$

由于$\mathrm{e}^{-k\xi}>0$，所以$f'(\xi)=kf(\xi)$。

（8）① 用反证法！由罗尔定理推出矛盾。

② 设$F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，应用罗尔定理即可证明。

例 2.4 证明下列各题：

（1）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且$f(a)=f(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$使$f'(\xi)=f(\xi)$；

（2）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且$f(a)=f(b)=0$，证明对任意的λ，存在$\xi\in(a,b)$使$f'(\xi)=\lambda f(\xi)$；

（3）设$f(x)$在$[a,b]$上有直到n阶的导数，在(a,b)内$n+1$阶可导且$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0(k=0,1,2,\cdots,n)$，证明存在$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$；

（4）设$f(x)$在$[0,1]$上连续且$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，证明在$(0,1)$内至少存在一点$\xi$使$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$；

（5）设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(1)=2f(0)$，证明存在$c\in(0,1)$使得$(c+1)f'(c)=f(c)$；

（6）设$f(x)$在$[a,b]$上三次可导，且有$f(a)=f'(a)=f(b)=f'(b)=0$，则存在$\xi\in(a,b)$使得$f'''(\xi)=0$；

（7）设$f(x)$在$[0,1]$上二次可导，且$f'(0)=0$，证明存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)-(\xi-1)^2f''(\xi)=0$；

（8）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$，证明存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=\left(1-\dfrac{1}{\xi}\right)f(\xi)$；

（9）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且$f^2(a)-f^2(b)=b^2-a^2$，证明存在$\xi\in(a,b)$使$f'(\xi)f(\xi)+\xi=0$。

证明 （1）设$F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，在$[a,b]$上应用罗尔中值定理可得证。

（2）设$F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x)$，在$[a,b]$上应用罗尔中值定理可得证。

（3）当$n=0$时易知成立，当$n>0$时，设$F(x)=\mathrm{e}^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}f^{(k)}(x)$，在$[a,b]$上应用罗尔定理即可。

（4）构造函数

$$F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

在$(0,1)$利用罗尔定理可得证。

（5）构造函数

$$F(x)=\frac{f(x)}{x+1}$$

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又

$$F(1)=\frac{f(1)}{2}=f(0),\quad F(0)=f(0)$$

所以 $F(1)=F(0)$，由罗尔中值定理可得，存在 $c\in(0,1)$ 使得 $F'(c)=0$，即

$$\frac{f'(c)(c+1)-f(c)}{1+c}=0$$

所以 $(c+1)f'(c)=f(c)$。

（6）因 $f(a)=f(b)$，在 $[a,b]$ 上应用罗尔中值定理可知，存在 $\xi_1\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi_1)=0$，又由 $f'(a)=f'(b)=0$，在 $[a,\xi_1],[\xi_1,b]$ 上分别应用罗尔中值定理可知，存在 $\xi_2\in(a,\xi_1),\xi_3\in(\xi_1,b)$，使得 $f''(\xi_2)=0,f''(\xi_3)=0$，在 $[\xi_2,\xi_3]$ 上应用罗尔中值定理可知，存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_3)\subset(a,b)$ 使得 $f'''(\xi)=0$。

（7）将所证式子变形为 $$f''(\xi)-\frac{f'(\xi)}{(\xi-1)^2}=0$$

设 $$F(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}f'(x),\ 0\leqslant x<1$$

虽然 $F(x)$ 在 $x=1$ 无定义，但由于 $\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=f'(1)$，而且 $\lim\limits_{x\to1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$，故只要令 $F(1)=0$，就可使 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导。

又 $F(0)=\mathrm{e}^{-1}f'(0)=0=F(1)$，故由罗尔中值定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{\xi-1}}\left[f''(\xi)-\frac{f'(\xi)}{(\xi-1)^2}\right]=0$$

从而 $$f''(\xi)-\frac{f'(\xi)}{(\xi-1)^2}=0$$

故 $$f'(\xi)-(\xi-1)^2f''(\xi)=0$$

（8）设 $F(x)=x\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=0=F(1)$，故由罗尔中值定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\mathrm{e}^{-\xi}f(\xi)-\xi\mathrm{e}^{-\xi}f(\xi)+\xi\mathrm{e}^{-\xi}f'(\xi)=0$$

从而 $$(1-\xi)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0\text{，即 }f'(\xi)=\left(1-\frac{1}{\xi}\right)f(\xi)$$

（9）设 $$F(x)=f^2(x)+x^2$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)$，故由罗尔中值定理可得，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)f(\xi)+\xi=0$$

例 2.5　证明下列各题：

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且有 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，若 C 满足 $f'(a)<C<f'(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=C$；（此题称为达布定理，又称为导函数的介值定理）

（3）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$；

（4）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=a$，$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=b$，试证对任意实数 $k\in(-2,2)$，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=k$；

（5）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，且 $f(a)=f(b)$，则对任意的 $k>0$，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=\dfrac{kf'(\xi)}{b-\xi}$；

（6）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，且 $f(0)=f(1)$，证明存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=-2f'(0)$，$f''(\eta)=2f'(1)$。

证明 （1）不妨设 $f'_+(a)<0$，$f'_-(b)>0$，而

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$$

由极限的保号性定理，可知 $\exists\delta_1>0$，当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$，从而 $f(x)<f(a)$。

同理 $\exists\delta_2>0$，当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$，从而 $f(x)<f(b)$。

又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最小值，由上可知最小值必在 (a,b) 内。

设 $\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，由费马定理知 $f'(\xi)=0$。

（2）**证法一**

设 $\varphi(x)=f(x)-Cx$，则 $\varphi'(x)=f'(x)-C$，显然 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\varphi'(a)<0$，$\varphi'(b)>0$，故由上题得证。

证法二

做辅助函数
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\in(a,b]\\ f'(a)\quad, & x=a\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}, & x\in[a,b)\\ f'(b)\quad, & x=b\end{cases}$$

由条件知，$F(x),G(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，由连续函数的介值定理得 $F(x)$ 可以取到 $f'(a)$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 间的一切值，$G(x)$ 可以取到 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 与 $f'(b)$ 间的一切值。

所以若 $f'(a)<C\leqslant\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则存在 $x_0\in(a,b]$，使 $F(x_0)=C$，由拉格朗日中值定理得，存在 $\xi\in(a,x_0)\subset(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-C}=F(x_0)=C$。

若 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<C<f'(b)$，则存在 $x_0\in[a,b)$，使 $G(x_0)=C$，由拉格朗日中值定理得，存在 $\xi\in(x_0,b)\subset(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=G(x_0)=C$。

（3）设

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, a<x\leqslant b\\ f'(a), \quad x=a\end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g(b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

当 $g(a)=g(b)$ 时，在 $[a,b]$ 上应用罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $g'(\xi)=0$，而

$$g'(x)=\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]'=\frac{(x-a)f'(x)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}=\frac{1}{x-a}\left[f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$$

所以 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$。

当 $g(a)\neq g(b)$ 时，不妨设 $g(a)<g(b)$，由 $g(a)=f'(a)$，$f'(a)=f'(b)$ 知 $f'(b)<g(b)$，于是

$$g'(b)=\frac{1}{b-a}\left[f'(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=\frac{1}{b-a}[f'(b)-g(b)]<0$$

可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值点 $\xi\in(a,b)$ 也是极大值点，由费马定理知，$g'(\xi)=0$，故

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

（4）设 $g(x)=f(x)-kx$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$\begin{aligned}g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)&=\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-k\cdot\frac{a+b}{2}\right]-[f(a)-ka]\\&=\left[b-k\cdot\frac{a+b}{2}\right]-(a-ka)=(b-a)\left(1-\frac{k}{2}\right)>0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(b)&=\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-k\cdot\frac{a+b}{2}\right]-[f(b)-kb]\\&=\left[b-k\cdot\frac{a+b}{2}\right]-(a-kb)=(b-a)\left(1+\frac{k}{2}\right)>0\end{aligned}$$

因此 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值点 $\xi\in(a,b)$ 也是极大值点，由费马定理知，$g'(\xi)=0$，故

$$f'(\xi)=k。$$

（5）设 $g(x)=(b-x)^k f'(x)$，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔中值定理可得，存在 $\eta\in(a,b)$ 使 $f'(\eta)=0$。再由 $g(x)$ 在 $[\eta,b]$ 上连续，在 (η,b) 内可导，且 $g(\eta)=0=g(b)$ 知，满足罗尔中值定理，故存在 $\xi\in(\eta,b)\subset(a,b)$ 使 $g'(\xi)=0$，即

$$(b-\xi)^k f''(\xi)-k(b-\xi)^{k-1}f'(\xi)=0$$

因为 $b-\xi>0$，所以有 $f''(\xi)=\dfrac{kf'(\xi)}{b-\xi}$。

（6）令 $$g(x)=f(x)+(x^2-x)f'(0)$$

则 $g(0)=g(1)$，对 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 应用罗尔中值定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $g'(c)=0$。

又因 $g'(0)=0$，在对 $g'(x)$ 在 $[0,c]$ 应用罗尔中值定理，存在 $\xi\in(0,c)\subset)(0,1)$，使得 $g''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=-2f'(0)$。

再令 $\varphi(x)=f(x)+(x^2-x)f'(1)$，同理可证存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)=2f'(1)$。

例 2.6 证明下列各题：

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，若存在一点 $c\in(a,b)$ 使 $f(a)=f(b)=f(c)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$，证明 $\exists\xi\in(0,3)$ 使 $f'(\xi)=0$；

（3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，证明存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=1$；

（4）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $g'(x)\neq0,$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$；

（5）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导且 $f(0)=f(1)=0,$ 证明存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$；

（6）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导,其中 $a>0, f(a)=0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$；

（7）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，求证

① 存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=\xi$；

② 存在一点 $\zeta\in(0,1)$ 使 $f'(\zeta)=1$；

③ $\forall\lambda,\exists\eta\in(0,\xi)$ 使 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$；

（8）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-x^2}\cdot f(x)\mathrm{d}x$，则在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$；

（9）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导且 $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$。

证明　（1）在 $[a,c],[c,b]$ 上应用两次罗尔定理得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，再在 $[\xi_1,\xi_2]$ 应用罗尔定理即可。

（2）因 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有最小值 m 和最大值 M，而

$$m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M$$

由介值定理知 $\exists c\in[0,2]$ 使 $f(c)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$。

在 $[c,3]$ 上应用罗尔定理即可。

（3）设 $F(x)=f(x)-x$，在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上应用根的存在性定理知，存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使 $F(\eta)=0$，在 $[0,\eta]$ 上应用罗尔定理即可。

（4）设 $F(x)=[f(a)-f(x)][g(x)-g(b)]$，在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理即可。或设 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)$，在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理。

（5）设 $F(x)=f(x)(1-x)$，在 $[0,1]$ 上应用罗尔定理可得 $F'(\xi_1)=0$，又 $F'(1)=-f(1)=0$，在 $[\xi_1,1]$ 上应用罗尔定理即可。

（6）设 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，应用罗尔定理即可。

（7）①设 $F(x)=f(x)-x$，在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上应用根的存在性定理知，存在 $\xi\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\subset(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

② 因 $F(\xi)=0$，$F(0)=0$，由罗尔定理可得证。

③ 设 $G(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[f(x)-x]$，利用①在 $[0,\xi]$ 上应用罗尔定理即可。

（8）做辅助函数

$$F(x)=f(x)\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{1-\eta^2}f(\eta)\quad\left(\text{由积分中值定理，其中}0\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{2}\right)$$

所以

$$F(1)=f(1)\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{1-\eta^2}f(\eta)\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-\eta^2}f(\eta),$$

$$F(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta^2}f(\eta)$$

故由罗尔定理可得，至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)\mathrm{e}^{-\xi^2}-2\xi\mathrm{e}^{-\xi^2}f(\xi)=0$$

即 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$。

（9）用积分中值定理后，用罗尔定理即可。

例 2.7 证明下列各题：

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，证明 $\exists\xi>0$，使

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

（2）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导且 $0\leqslant f(x)\leqslant\ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$，证明 $\exists\xi>0$，使

$$f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

（3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内二阶可导且

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使 $f'(\xi)=0$。

证明 （1）令
$$F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$$
则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $[0,+\infty)$ 上可导，又 $F(0)=F(+\infty)=0$；故由推广的罗尔定理知 $\exists\xi>0$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

（2）令
$$F(x)=f(x)-\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $[0,+\infty)$ 上可导，又 $F(0)=F(+\infty)=0$；故由推广的罗尔定理知，$\exists\xi>0$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

（3）因在 $(0,\pi)$ 内 $\sin x>0$，由 $\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$ 知 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内不能恒正或恒负，由 $f(x)$ 连续知至少有一个零点，即必存在一点 $x_0\in(0,\pi)$。

下面用反证法证明还有另外的零点。

若 $x_0\in(0,\pi)$ 是 $f(x)$ 唯一的零点，则 $\sin(x-x_0)f(x)$ 恒正或恒负，于是

$$\int_0^{\pi}\sin(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x\neq 0$$

与由已知得到的结果

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}(\sin x\cos x_0-\cos x\sin x_0)f(x)\mathrm{d}x\\&=\cos x_0\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x-\sin x_0\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

矛盾！故在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 至少有两个零点，再由罗尔定理可得证。

2.4.2　拉格朗日中值定理的应用

1．利用拉格朗日中值定理证明恒等式和不等式

利用中值定理证明恒等式与不等式，常用如下结论：

（1）若 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x)\equiv 0, x\in I$，则 $f(x)\equiv C$，C 为常数，$x\in I$。

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则利用 $a<\xi<b$ 及单调性，进行放大或缩小，可得不等式。

例 2.8　证明下列恒等式：

（1）$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi\quad\left(|x|\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$；

（2）$\arcsin x+\arccos x\equiv\dfrac{\pi}{2}\quad(|x|\leqslant 1)$；

（3）$2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x$，$|x|\geqslant 1$。

证明　（1）设
$$f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$$
当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，得
$$\begin{aligned}f'(x)&=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}(3-12x^2)\\&=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}(3-12x^2)=0\end{aligned}$$
故有 $f(x)=C$，令 $x=0$ 代入得 $C=\pi$。

故当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时有 $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$，又因为上式左端的函数在 $x=\dfrac{1}{2}$ 左连续，在 $x=-\dfrac{1}{2}$ 右连续，分别取极限即知，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 和 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，上式也成立。

故
$$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi\quad\left(|x|\leqslant\frac{1}{2}\right)$$

（2）设函数
$$f(x)=\arcsin x+\arccos x$$
由于
$$f'(x)=(\arcsin x+\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$
故在 $(-1,1)$ 上恒有
$$\arcsin x+\arccos x=C$$
令 $x=0$，得
$$C=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$$
从而 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$。

（3）当 $x>1$ 或 $x<-1$ 时有 $\left(2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right)'=0$，故

$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=C$$

取 $x=\sqrt{3}$ 可得 $C=\pi$，取 $x=-\sqrt{3}$ 可得 $C=-\pi$ 。

所以 $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x$ ，当 $x=\pm1$ 时也成立。

例 2.9 若函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ ， $f''(x)-f'(x)=0$ ，证明 $f(x)=0$ 。

证明 设
$$g(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)+f(x)]$$
则
$$g'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f''(x)-f'(x)]\equiv0$$
故 $g(x)=C_1$ （常数），即 $f'(x)+f(x)=C_1\mathrm{e}^x$ 。因为 $f'(0)+f(0)=0$ 得， $C_1=0$ ，即 $f'(x)+f(x)=0$ 。

再设
$$\varphi(x)=\mathrm{e}^x f(x)$$
则
$$\varphi'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)+f(x)]\equiv0$$
故 $\varphi(x)=C_2$ （常数），即 $f(x)=C_2\mathrm{e}^{-x}$ 。

由 $f(0)=0$ 得 $C_2=0$ ，故 $f(x)=0$ 。

例 2.10 证明下列不等式：

（1）设 n 为正整数，则 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$;

（2）设 a 、 b 是实数，且 $\mathrm{e}<a<b$ ，则 $a^b>b^a$ ；

（3）设 $f''(x)<0, f(0)=0$ ，则当 $0<a\leqslant b$ 时 $f(a+b)<f(a)+f(b)$ ；

（4）对 $a>1,n\geqslant1$ 有 $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ ；

（5）对 $p>1, n\geqslant2$ 有 $\dfrac{1}{n^p}<\dfrac{1}{p-1}\left[\dfrac{1}{(n-1)^{p-1}}-\dfrac{1}{n^{p-1}}\right]$ ；

（6）对于任何 $x>0$ 有 $0<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<1$ 。

证明 （1）设 $f(x)=\ln x$ ，在区间 $[n,n+1]$ 上，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(n,n+1)$ ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}$ ，即 $\dfrac{1}{\xi}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 。

注意到 $\xi\in(n,n+1)$ ，故 $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{n}$ ，从而 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 。

（2）将所证的不等式变形为 $b\ln a>a\ln b$ ，即 $\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$ ，构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 。

由于在区间 $[a,b]$ 上， $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$ ，在区间 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理得 $\dfrac{\ln b}{b}-\dfrac{\ln a}{a}=f'(\xi)(b-a)<0$ ，故命题得证。

（3）**证法一**　由拉格朗日中值公式得

$$f(a)-f(0)=f'(\xi_1)a,\ f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)a\ ,$$

因 $f''(x)<0$, 所以 $f'(x)$ 严格递减，而 $\xi_1<a\leqslant b<\xi_2$，故 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$，得证。

证法二　令 $F(x)=f(x+a)-f(x)$，因 $f''(x)<0$, 所以 $f'(x)$ 严格递减，则 $F'(x)=f'(x+a)-f'(x)<0$，从而 $F(x)$ 严格递减，由 $F(b)<F(0)$，得证。

（4）对 $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$ 在 $[n,n+1]$ 上应用拉格朗日中值定理即可。

（5）对函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^{p-1}}$ 在 $[n-1,n]$ 应用拉格朗日中值定理即可。

（6）由拉格朗日中值定理得

$$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln 1=\frac{x}{1+\theta x},0<\theta<1$$

因此

$$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{1+\theta x}{x}-\frac{1}{x}=\theta$$

2．利用拉格朗日中值定理求特殊形式的极限

中值定理在理论分析与证明题中的作用是众所周知的，我们在求一些函数极限时，也可以借助中值定理处理某类极限问题。

在函数极限的运算中，若函数是 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $f(b)-f(a)$ 的形式，可以构造满足拉格朗日中值定理条件的函数，将所求简化，以便运算。

例 2.11　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right),a>0,a\neq 1$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x\right]$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1+\cos x)}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 2x}{1+\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

（7）设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$，求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin[f(x)]-\sin b}{x-a}$。

解　（1）令 $f(x)=e^x$，易知该函数在区间 $[x,\sin x]$ 满足拉格朗日中值定理的条件，对该函数应用拉格朗日中值定理得

$$\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}=\mathrm{e}^{\xi}$$

其中 $x<\xi<\sin x$，当 $x\to 0$ 时 $\xi\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{\xi\to 0}\mathrm{e}^{\xi}=1$$

（2）题为 $f(b)-f(a)$ 的形式，令 $f(x)=a^x$，易知该函数在区间 $\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\right]$ 满足拉格朗日中值定理的条件，对该函数应用拉格朗日中值定理得

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}=a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\xi}\ln a\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

其中 $\frac{1}{n+1}<\xi<\frac{1}{n}$，当 $n\to\infty$ 时 $\xi\to 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2a^{\xi}\ln a\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\ln a\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\ln a$$

（3）令 $f(t)=\ln\arctan t$，$f(t)$ 在 $[x,x+1]$ 满足拉格朗日中值定理的条件得

$$\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x=\frac{1}{\arctan\xi}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}$$

其中 $x<\xi<x+1$，当 $x\to+\infty$ 时 $\xi\to+\infty$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan\xi}\cdot\frac{x^2}{1+\xi^2}$$

又

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}>\frac{1}{\arctan\xi}\cdot\frac{x^2}{1+\xi^2}>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{1+(x+1)^2}$$

由追敛性定理得

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]=\frac{2}{\pi}$$

（4）令

$$f(x)=\arctan\frac{a}{x}$$

$f(x)$ 在 $[n,n+1]$ 满足拉格朗日中值定理的条件，得

$$\arctan\frac{a}{n+1}-\arctan\frac{a}{n}=-\frac{a}{\xi^2+a^2}$$

其中 $n<\xi<n+1$，当 $n\to\infty$ 时 $\xi\to+\infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2}{\xi^2+a^2}$$

又

$$\frac{an^2}{n^2+a^2}>\frac{an^2}{\xi^2+a^2}>\frac{an^2}{(n+1)^2+a^2}$$

由追敛性定理得

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=a$$

（5）令 $f(t)=\sqrt{1+t}$，当 $t>0$（或 $t<0$）$f(x)$ 在 $[\sin x,\tan x]$（或 $[\tan x,\sin x]$）满足拉格朗日中值定理的条件，得

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\sqrt{1+\xi}}$$

其中 $\sin x<\xi<\tan x$（或 $\tan x<\xi<\sin x$），当 $x\to 0$ 时 $\xi\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{2x(1+\cos x)\sqrt{1+\xi}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\tan x}{x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

（6）
$$\left(\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}[\ln\cos 2x-\ln(1+\sin^2 x)]}$$

令 $f(t)=\ln t$，在 $[\cos 2x,1+\sin^2 x]$ 满足拉格朗日中值定理的条件，得

$$\ln\cos 2x-\ln(1+\sin^2 x)=\frac{1}{\xi}[\cos 2x-(1+\sin^2 x)]$$

其中 $\cos 2x<\xi<1+\sin^2 x$，当 $x\to 0$ 时 $\xi\to 1$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}[\ln\cos 2x-\ln(1+\sin^2 x)]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x-\ln(1+\sin^2 x)}{x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-(1+\sin^2 x)}{\xi x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-(1+\sin^2 x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x-2\sin x\cos x}{2x}}=\mathrm{e}^{-3}$$

（7）由题意知 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b, f(a)=b$，所以 $f(x)$ 在 a 点连续。

令 $g(t)=\sin t$，显然 $g(t)$ 在 $[b,f(x)]$ 或 $[f(x),b]$ 满足拉格朗日中值定理，故 $\exists\xi$ 介于 b 与 $f(x)$ 之间，当 $x\to a$ 时 $\xi\to b$，所以

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin[f(x)]-\sin b}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos\xi\frac{f(x)-\sin b}{x-a}=A\cos b$$

3．利用拉格朗日中值定理证明含有中值点的问题

例 2.12　证明下列各题：

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不恒为常数，在 (a,b) 内可导，又 $f(a)=f(b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)>0$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，又若存在一点 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)>0$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)<0$；

（3）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=1$，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$；

（4）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\xi^{n-1}[nf(\xi)+\xi f'(\xi)]$$

（5）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且有限导数，$f(x)$ 是非线性函数，证明在 (a,b) 内至少存在一点 c 使

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

（6）若 $f(x)$ 满足下列条件：

① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$，

② $f(x)$ 在 (a,b) 内一阶可导，且 $f_+'(a)$ 存在大于 0，

③ $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导；

求证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)<0$；

（7）设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

（8）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二次可导，若曲线 $y=f(x)$ 与两点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 间的连接直线有交点 $(c,f(c)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$。

证明 （1）因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为常数，故至少存在一点 $c\in(a,b)$ 使 $f(a)=f(b)\neq f(c)$，不妨设 $f(c)>f(a)$，在 $[a,c]$ 上应用拉格朗日定理可得证。

（2）$f(x)$ 在 $[a,c],[c,b]$ 上分别应用拉格朗日定理可得 ξ_1,ξ_2，再在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用拉格朗日定理可得证。

（3）首先对 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ 在 $[a,b]$ 应用拉格朗日定理得

$$\mathrm{e}^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}$$

再对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 应用拉格朗日定理得 $\mathrm{e}^{\xi}=\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}$，故得证。

（4）令 $F(x)=x^n f(x)$，在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日定理可得证。

（5）令
$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

显然 $F(a)=F(b)=0$ 且当 $a<x<b$ 时 $F(x)$ 不恒为 0（因 $f(x)$ 是非线性函数），即存在一点 $c_1\in(a,b)$ 使 $F(c_1)\neq0$，不妨设 $F(c_1)>0$，在 $[a,c_1]$ 上应用拉格朗日定理得

$$F'(\xi_1)=\frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a}=\frac{F(c_1)}{c_1-a}>0$$

即
$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

在 $[c_1,b]$ 上应用拉格朗日定理得

$$F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1}=-\frac{F(c_1)}{c_1-a}<0$$

即
$$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

因而当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0$ 时，取 $c=\xi_1$ 有 $|f'(c)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$；

当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 时，取 $c=\xi_2$ 有 $|f'(c)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$。

（6）观察所证结论，对 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理，这样就需要找出 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理的闭区间，$[a,b]$ 区间显然不行。为此将 $[a,b]$ 区间分成两段来处理。

由条件①、②可得，在 $[a,b]$ 区间内存在一点 c，使得 $f(c)-f(a)>0$，即 $f(c)>0$。故这样就将 $[a,b]$ 区间分成两段 $[a,c],[c,b]$。在这两段上分别应用拉格朗日中值定理，可得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0,$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{-f(c)}{b-c}<0$$

由于 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 上可导，应用拉格朗日中值定理，必存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$$

（7）设

$$g(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x)$$

对 $g(x)$ 在 $[a,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，可得

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(\zeta)=f'\left(\zeta+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\zeta),\zeta\in(a,x)$$

对 $f'(x)$ 在 $\left[\zeta,\zeta+\dfrac{b-a}{2}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理，可得

$$f'\left(\zeta+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\zeta)=\frac{b-a}{2}f''(\xi),\xi\in\left(\zeta,\zeta+\frac{b-a}{2}\right)$$

所以

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\frac{b-a}{2}f''(\xi)$$

即

$$g(x)-g(a)=(x-a)\cdot\frac{b-a}{2}f''(\xi)$$

令 $x=\dfrac{a+b}{2}$，代入上式得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

（8）由题设条件知，三点 $(a,f(a)),(c,f(c)),(b,f(b))$ 在一条直线上，故

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

在$[a,c],[c,b]$上应用拉格朗日中值定理，可得

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$，$f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$，其中$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$

故$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$。

在$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔中值定理，知存在$\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$使$f''(\xi)=0$。

例 2.13 证明下列各题：

（1）设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(0)=0,f(1)=1$，证明在$(0,1)$内存在不相同的两点ξ_1,ξ_2，使得$\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$；

（2）设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(0)=0,f(1)=1$，$k_1,k_2,\cdots,k_n$为n个正数，证明在$(0,1)$内存在n个互异的点$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，使得$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{k_i}{f'(\xi_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$；

（3）若$f(x)$为二次连续可微实值函数，对于所有的实数x，满足$|f(x)|\leqslant 1$且满足$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$，证明存在实数x_0满足$f(x_0)+f''(x_0)=0$；

（4）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0,f(1)=\dfrac{1}{2}$，证明在$(0,1)$内存在相异的两点ξ,η，使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$；

（5）设$h>0$，函数f在$[a-h,a+h]$上可导，证明存在$\theta\in(0,1)$使得

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h)$$

证明 （1）因$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=0,f(1)=1$，由介值定理知，存在$x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=\dfrac{1}{2}$。

在$[0,x_0],[x_0,1]$上分别应用拉格朗日定理，可得$\xi_1\in(0,x_0),\xi_2\in(x_0,1)$使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{\frac{1}{2}-0}{x_0-0}=\frac{1}{2x_0},$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-x_0}=\frac{1}{2-2x_0}$$

从而
$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2x_0+(2-2x_0)=2$$

（2）设$\lambda_i=\dfrac{k_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}$，$i=1,2,\cdots,n$，则$0<\lambda_i<1$且$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$。

由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=0,f(1)=1$，由介值定理知，存在$x_1\in(0,1)$，使得$f(x_1)=\lambda_1$；又因为$\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1$，由介值定理知，存在$x_2\in(x_1,1)$，使得

$f(x_2)=\lambda_1+\lambda_2$；依次下去，得点 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$，使得

$$f(x_i)=\sum_{k=1}^{i}\lambda_k,\quad i=1,2,\cdots,n-1$$

在 $[x_{i-1},x_i]$ 上应用拉格朗日定理，可得存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使

$$f'(\xi_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

即

$$\frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)}=(x_i-x_{i-1}),\quad i=1,2,\cdots,n$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)}=x_n-x_0=1$$

将 $\lambda_i=\dfrac{k_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}$ 代入上式，整理即得所证结论。

（3）在 $[-2,0]$ 和 $[0,2]$ 上应用拉格朗日中值定理，得存在 $c_1\in(-2,0),c_2\in(0,2)$ 使得

$$f'(c_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},f'(c_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}$$

从而有

$$|f'(c_1)|\leqslant 1,|f'(c_2)|\leqslant 1$$

设

$$F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$$

则有

$$F(0)=4,F(c_1)\leqslant 2,F(c_2)\leqslant 2$$

即 $F(x)$ 在 (c_1,c_2) 上有最大值，从而存在点 x_0，有 $F'(x_0)=0$，即

$$2f'(x_0)[f(x_0)+f''(x_0)]=0$$

若 $f'(x_0)=0$，$F(x_0)=[f'(x_0)]^2\leqslant 1$，这与 $F(x_0)\geqslant 4$ 矛盾。所以

$$f(x_0)+f''(x_0)=0$$

（4）令 $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$，则 $g(0)=0=g(1)$，于是

$$\frac{g\left(\frac{1}{2}\right)-g(0)}{\frac{1}{2}-0}=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=-\frac{g(1)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

又对 $g(x)$ 分别在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上应用拉格朗日中值定理，得存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得

$$g'(\xi)=\frac{g\left(\frac{1}{2}\right)-g(0)}{\frac{1}{2}-0}，\ g'(\eta)=\frac{g(1)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

从而 $g'(\xi)=-g'(\eta)$，即 $f'(\xi)-\xi=-[f'(\eta)-\eta]$，故 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$。

（5）令 $F(x)=f(a+x)+f(a-x)$，在 $[0,h]$ 上应用拉格朗日中值定理即可。

4．利用拉格朗日中值定理讨论函数的性质

例 2.14 证明下列各题：

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0$，$\forall x\in[0,1]$ 有 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$，证明在 $[0,1]$ 上 $f(x)=0$；

（2）设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可微，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在且为有限数，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$；

（3）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

证明 （1）$\forall x\in(0,1)$，由拉格朗日中值定理和已知不等式得

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f(x)-f(0)|=|f'(\xi_1)|(x-0)\leqslant|f(\xi_1)|x\\&=|f(\xi_1)-f(0)|x=|f'(\xi_2)|(\xi_1-0)x\\&\leqslant|f(\xi_2)|x^2=\cdots\leqslant|f(\xi_n)|x^n\end{aligned}$$

其中 $0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_2<\xi_1<x$。

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续知有界 M，从而 $|f(x)|\leqslant Mx^n$，故 $\forall x\in(0,1)$ 有 $f(x)=0$；又 $f(0)=0$，$f(x)$ 在 1 点左连续，所以 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$，故在 $[0,1]$ 上总有 $f(x)=0$。

（2）**证法一**

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=B$，取 $x\in(a,+\infty)$，$x+1\in(a,+\infty)$，则由拉格朗日中值定理和已知不等式得

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)$$

令 $x\to+\infty$，则 $\xi\to+\infty$，上式两边令 $x\to+\infty$，得 $A-A=0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。

证法二

反证法。假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=l\neq0$，不妨设 $l>0$，则 $\exists M>a,$ 当 $x\geqslant M$ 时有 $f'(x)>\dfrac{l}{2}$，所以

$$f(x)-f(M)=f'(\xi)(x-M)>\frac{l}{2}(x-M)$$

即 $f(x)>f(M)+\dfrac{l}{2}(x-M)$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与题意矛盾。故得证。

（3）由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，故任给 $\varepsilon>0$，存在 $M_1>0$，当 $x>M_1$ 时有 $|f'(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $x>M_1$ 时，由拉格朗日中值定理得

$$|f(x)-f(M_1)|=|f'(\xi)(x-M_1)|<\frac{\varepsilon}{2}|x-M_1|$$

故
$$|f(x)|\leqslant|f(M_1)|+\frac{\varepsilon}{2}|x-M_1|$$

再取 $M_2>0$ 使 $\left|\dfrac{f(M_1)}{M_2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $x>\max\{M_1,M_2\}$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{|f(M_1)|+\frac{\varepsilon}{2}|x-M_1|}{|x|}=\frac{|f(M_1)|}{|x|}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{|x-M_1|}{|x|}\leqslant\left|\frac{f(M_1)}{M_2}\right|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

例 2.15　证明下列各题：

（1）已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数，证明：

① $\exists M>0$，使 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|$；

② 若 $f(a)=0$，则 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{M}{2}(b-a)^2$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，且 $|f''(x)|\leqslant M$，$f(x)$ 在 (a,b) 内取得最大值，证明 $|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant(b-a)M$。

（3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $|f'(x)|<1$，$f(0)=f(1)$，证明对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$；

（4）对于 $[a,b]$ 上的连续可微函数 $f(x)$，若 $f(a)=f(b)=0$，则有

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$$

（5）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可导，且 $f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\leqslant1$，证明 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x<3$。

证明　（1）由已知，对 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$（不妨设 $x_1<x_2$），$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理。又由已知，$f'(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，故 $\exists M>0$，使 $|f'(x)|\leqslant M$，故

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)(x_1-x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|$$

即①成立。

由 $f(a)=0$ 可得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)-f(a)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2$$

即②成立。

（2）由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内取到最大值，所以最大值点 $x_0\in(a,b)$ 也是极大值点，由费马定理知，$f'(x_0)=0$，对 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理，得

$$\begin{aligned}&|f'(a)|+|f'(b)|=|f'(a)-f'(x_0)|+|f'(b)-f'(x_0)|\\&=|f''(\xi_1)||a-x_0|+|f''(\xi_2)||b-x_0|\leqslant M(x_0-a)+M(b-x_0)=(b-a)M\end{aligned}$$

其中 $\xi_1\in(a,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,b)$。

（3）不妨设 $x_1<x_2$，若 $x_2-x_1\leqslant\dfrac{1}{2}$，则由拉格朗日中值定理，显然有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|(x_1-x_2)f'(\xi_1)|<\frac{1}{2}\quad(x_1<\xi_1<x_2)$$

若 $x_2-x_1>\dfrac{1}{2}$，则由拉格朗日中值定理，显然有

$$\begin{aligned}&|f(x_1)-f(x_2)|=|[f(x_1)-f(0)]+[f(1)-f(x_2)]|\\&\leqslant|f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|\\&\leqslant|f'(\xi_2)||x_1-0|+|f'(\xi_3)||1-x_2|\leqslant x_1+(1-x_2)<\frac{1}{2}\end{aligned}$$

其中 $0<\xi_2<x_1$，$x_2<\xi_3<1$。

综上所述，结论得证。

（4）容易看出此题要用微分中值定理来证明，但通过对所证结论的分析知，直接在 $[a,b]$ 上应用中值定理是不行的，再加上 a,b 两点的函数值相等且为 0，因此考虑将 $[a,b]$ 分成两段来处理。由已知条件知，$f(x)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 上均满足拉格朗日中值定理的条件，又 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值。

记 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$，应用拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}&\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(a)+f'(\xi_1)(x-a)|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(b)+f'(\xi_2)(x-b)|\,\mathrm{d}x\\&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(\xi_1)(x-a)|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(\xi_2)(x-b)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant M\int_a^{\frac{a+b}{2}}|(x-a)|\mathrm{d}x+M\int_{\frac{a+b}{2}}^b|(x-b)|\mathrm{d}x=\frac{M}{4}(b-a)^2\end{aligned}$$

故 $\dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$ 成立。

（5）任给 $x\in(0,2)$，对 $f(x)$ 分别在 $[0,x]$ 与 $[x,2]$ 上利用拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\xi_1),\qquad 0<\xi_1<x$$

$$f(x)=f(2)+(x-2)f'(\xi_2),\quad x<\xi_2<2$$

因为$|f'(x)|\leqslant 1$，即$-1\leqslant f'(x)\leqslant 1$，且$f(0)=f(2)=1$，故由上面的两式得$3-x\leqslant f(x)\leqslant 1+x$。

令$g(x)=\begin{cases}x+1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，则$f(x)\leqslant g(x), x\in[0,2]$，故

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=3。$$

但等号不成立（否则有$f(x)\equiv g(x)$，而$g(x)$在$x=1$处不可导，这与题设矛盾），故$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x<3$。

2.4.3　柯西中值定理的应用

1．利用柯西中值定理证明不等式

例 2.16　证明下列不等式：

（1）$\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}>(\cos x_1-\cos x_2)\mathrm{e}^{x_1}$，其中$0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$；

（2）$\cos x>1-\dfrac{x^2}{2!}$，其中$x\neq 0$；

（3）$\sin x>x-\dfrac{x^3}{3!}$，其中$x>0$；

（4）$\cos x<1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$，其中$x\neq 0$；

（5）$\sin x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$，其中$x>0$；

证明　（1）将不等式变形为

$$\frac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}{\cos x_1-\cos x_2}>\mathrm{e}^{x_1}$$

对$f(x)=\mathrm{e}^x, g(x)=\cos x$在$[x_1,x_2]$上应用柯西中值定理知，存在$\xi\in(x_1,x_2)$使得

$$\frac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}{\cos x_2-\cos x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{-\sin\xi},\quad x_1<\xi<x_2$$

从而
$$\frac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}{\cos x_1-\cos x_2}=\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\sin\xi}>\mathrm{e}^{\xi}>\mathrm{e}^{x_1}$$

（2）将不等式变形为
$$\frac{\cos x-1}{\dfrac{x^2}{2!}-0}>-1$$

对$f(t)=\cos t, g(t)=\dfrac{t^2}{2!}$，在$x$与 0 组成的闭区间上应用柯西中值定理知，存在$\xi$介于$x$与 0 之间，使得

$$\frac{\cos x-1}{\frac{x^2}{2!}-0}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{-\sin\xi}{\xi}>-1$$

从而 $\cos x>1-\frac{x^2}{2!}$。

（3）将不等式变形为
$$\frac{x-\sin x}{\frac{x^3}{3!}-0}<1$$

对 $f(t)=t-\sin t, g(t)=\frac{t^3}{3!}$，在 $[0,x]$ 上应用柯西中值定理，即得所证。

（4）设
$$f(t)=\cos t-1+\frac{t^2}{2!}, g(t)=\frac{t^4}{4!}$$

在 x 与 0 组成的闭区间上应用柯西中值定理，即得所证。

（5）设
$$f(t)=\sin t-t+\frac{t^3}{3!}, g(t)=\frac{t^5}{5!}$$

在 $[0,x]$ 上应用柯西中值定理，即得所证。

2．利用柯西中值定理求特殊形式的极限

中值定理在理论分析与证明题中的作用是众所周知的，在求一些函数极限时，也可以借助中值定理处理某类极限问题。

在函数极限运算中，若函数是 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 的形式，可以构造满足柯西中值定理条件的函数，将所求简化，以便运算。

例 2.17 （1）求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}$；

（2）求 $I=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x^x)-\sin(a^x)}{a^{x^x}-a^{a^x}}\quad (a>1)$；

解 （1）本题为 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 的形式，令 $f(x)=\tan x, g(x)=\sin x$，易知 $f(x),g(x)$ 在 $[\sin x,\tan x]$ 上满足柯西中值定理的条件，故 $\exists\xi\in(\sin x,\tan x)$，使得

$$\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}=\frac{f(\tan x)-f(\sin x)}{g(\tan x)-g(\sin x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\sec^2\xi}{\cos\xi}$$

当 $x\to 0$ 时 $\xi\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}=\lim_{\xi\to 0}\frac{\sec^2\xi}{\cos\xi}=1$$

（2）令
$$f(x)=\sin x, g(x)=a^x$$

易知 $f(x),g(x)$ 在 x^x 与 a^x 为端点组成的闭区间上满足柯西中值定理的条件，故存在 ξ 位于 x^x 与 a^x 之间，使得

$$\frac{\sin(x^x)-\sin(a^x)}{a^{x^x}-a^{a^x}}=\frac{f(x^x)-f(a^x)}{g(x^x)-g(a^x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\cos\xi}{a^{\xi}\ln a}$$

当 $x\to a$ 时 $\xi\to a^a$，所以

$$I=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x^x)-\sin(a^x)}{a^{x^x}-a^{a^x}}=\lim_{\xi\to 0}\frac{\cos\xi}{a^{\xi}\ln a}=\frac{\cos a^a}{a^{a^a}\ln a}$$

3．利用柯西中值定理证明含有中值点的问题

例 2.18　证明下列各题：

（1）设 $b>a>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $b\ln a-a\ln b=(b-a)(\ln\xi-1)$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$(0<a<b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$$

（3）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 $(0<a<b)$,证明至少存在一点 $c\in(a,b)$，使

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=f(c)-cf'(c)$$

（4）设 $b>a>0$，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $a\mathrm{e}^b-b\mathrm{e}^a=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}(a-b)$；

（5）设 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导 $(0<x_1<x_2)$，证明在 (x_1,x_2) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

（6）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$$

（7）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（$a>0$），在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，证明

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

其中 ξ,η 在 (a,b) 内；

（8）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，证明：

① $\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使 $f'(\xi_1)=\dfrac{\xi_2^2f'(\xi_2)}{ab}$；

② $\exists\eta_1,\eta_2\in(a,b)$，使 $f'(\eta_1)=(a^2+b^2+ab)\dfrac{f'(\eta_2)}{3\eta_2^2}$；

（9）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f'(x)\neq 0$，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\mathrm{e}^{-\eta}$。

证明　（1）构造函数　$f(x)=\dfrac{\ln x}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$

显然 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件，所以存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即
$$\frac{\dfrac{\ln b}{b}-\dfrac{\ln a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{1-\ln\xi}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=\ln\xi-1$$

化简得
$$b\ln a-a\ln b=(b-a)(\ln\xi-1)$$

（2）对 $f(x),g(x)=\ln x$ 应用柯西定理即可得证。

（3）对 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x},G(x)=\dfrac{1}{x}$ 应用柯西定理即可得证。

（4）**证法一** 对 $f(x)=\dfrac{e^x}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$，应用柯西定理即可得证。

证法二 对 $F(x)=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{ae^b-be^a}{a-b}$，应用拉格朗日定理即可得证。

（5）**证法一** 对 $f(x)=\dfrac{f(x)}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$ 应用柯西定理即可得证。

证法二 对 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}$ 应用拉格朗日定理即可得证。

（6）设 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{1}{2}(x-a)[f'(x)+f'(a)];G(x)=(x-a)^3$

则有
$$F(a)=F'(a)=G(a)=G'(a)=0$$

连续应用柯西中值定理可知，$\exists\xi_1\in(a,b),\xi\in(a,\xi_1)$ 使
$$\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_2)}=\frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)}=\frac{F''(\xi)}{G''(\xi)}=-\frac{1}{12}f'''(\xi)$$

即
$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$$

（7）对 $f(x)$ 和 $g(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理得，$\exists\eta\in(a,b)$，使
$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{b+a}{2\eta}f'(\eta)$。

对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理得，$\exists\xi\in(a,b)$ 使
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

故 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

（8）

① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 应用拉格朗日定理可得 ξ_1，$f(x)$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西

定理即可得证。

② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 应用拉格朗日定理可得 η_1， $f(x)$ 与 $g(x)=x^3$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西定理即可得证。

③ $f(x)$ 与 $g_1(x)=x^3, g_2(x)=x^4, g_3(x)=\ln x$ 分别在 $[a,b]$ 上应用柯西定理即可得证。

（9）首先对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 应用拉格朗日定理，再对 $f(x), g(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西定理即可得证。

例 2.19　证明下列各题：

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $a\geqslant 0$，证明存在 $x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使得

$$f'(x_1)=(a+b)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

（2）设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

（3）设函数 $g(x)$ 在点 a 二阶可导，证明 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(a+h)-2g(a)+g(a-h)}{h^2}=g''(a)$。

证明　（1） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日定理，可知存在 $x_1\in(a,b)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

又因为 $b+a>0$， $b^2+ab+a^2>0$，所以

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(b+a)\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=(b^2+ab+a^2)\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}$$

对 $f(x)$、 $g(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西定理，可知存在 $x_2\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_2)}{2x_2}$$

对 $f(x)$、 $g(x)=x^3$ 在 $[a,b]$ 应用柯西定理，可知存在 $x_3\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

综上便得所证。

（2）**证法一**　利用罗比达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$$

证法二　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$ 知，存在 $x_0>0$，当 $x>x_0$ 时有 $|f(x)+f'(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

令

$$F(x)=\mathrm{e}^x f(x),\ G(x)=\mathrm{e}^x$$

在 $[x_0,x]$ 上应用柯西中值定理得

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

即
$$\frac{e^x f(x)-e^{x_0}f(x_0)}{e^x-e^{x_0}}=\frac{e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]}{e^{\xi}}=f(\xi)+f'(\xi)$$
所以
$$f(x)=\frac{e^x-e^{x_0}}{e^x}[f(\xi)+f'(\xi)]+\frac{e^{x_0}}{e^x}f(x_0)$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

（3）**证法一**　令　$F(x)=g(a+x)-2g(a)+g(a-x), G(x)=x^2$

在 $[0,h]$ 上应用柯西中值定理后取极限可得
$$\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-2g(a)+g(a-h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{g'(a+\xi)-g'(a-\xi)}{2\xi}=g''(a)$$

证法二　由泰勒公式知
$$g(a+h)=g(a)+g'(a)h+\frac{g''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$$
即
$$g(a-h)=g(a)-g'(a)h+\frac{g''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$$
所以
$$\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-2g(a)+g(a-h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{g''(a)h^2+o(h^2)}{h^2}=g''(a)$$

2.4.4　泰勒中值定理的应用

1．利用带皮亚诺余项的泰勒公式求极限

罗比达法则是求不定式极限的一般方法，但对于复杂函数的多项乘积或加减的不定式来说，罗比达法则不是有效的方法，我们通常采用乘积因子用等价无穷小代替、加减因子用泰勒公式代替的方法，简化计算或直接求出。利用泰勒公式代替时，要根据不定式中无穷小（或无穷大）的阶数确定泰勒公式展开到哪一项。

例 2.20　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}e^{-x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$；　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；　　（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$；　　（8）$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\arccos\frac{\sin x}{x}}{x}$；

（9）$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\ln\dfrac{2+x}{2-x}\right)$；　　（10）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$。

解　(1) 此题为$\frac{0}{0}$型不定式，分母零因子的阶数为 4 次，将分子加减项用泰勒公式代替，将泰勒公式展开到x^4，由

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)$$

得

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x}=\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{2}+o(1)}=e^{-\frac{1}{2}}$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}-x\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}+0\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}=1$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left\{\left[1+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]-\left[1-\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}=\frac{1}{3}$$

(5) $$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x\left[1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left\{1-x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}$$

(6) $$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left\{\left[1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]+\left[1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-2\right\}=-\frac{1}{4}$$

(7) $$\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^6}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\left\{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]-\left[1-\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\left[\frac{1}{12x^4}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)+\frac{1}{2x^6}-o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right]=\frac{1}{6}$$

（8）$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\arccos\frac{\sin x}{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}}$ （罗比达法则）

$\displaystyle=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sqrt{x^2-\sin^2 x}}$ （用泰勒公式） $\displaystyle=\frac{1}{\sqrt{3}}$

（9）因 $\displaystyle\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\right]-$

$$\left[-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\right]=x+\frac{x^3}{12}+o(x^3)$$

所以
$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\ln\frac{2+x}{2-x}\right)=\frac{11}{12}$$

（10）因 $\ln\left[e^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right]=n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$展开到$o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，故原式极限为$\sqrt{e}$。

例 2.21 求下列极限：

（1）设函数 $g(x)$ 在点 a 二阶可导，求 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-2g(a)+g(a-h)}{h^2}$；

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导，且 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=0$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 和 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left[\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right]$。

解 （1）由泰勒公式知

$$g(a+h)=g(a)+g'(a)h+\frac{g''(a)}{2!}h^2+o(h^2),$$

$$g(a-h)=g(a)-g'(a)h+\frac{g''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$$

所以

$$\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-2g(a)+g(a-h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{g''(a)h^2+o(h^2)}{h^2}=g''(a)$$

（2） $\displaystyle 0=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)}{x^3}+\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}x^2f''(0)+o(x^2)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(3+f(0)\right)x+f'(0)x^2+\left(\frac{f''(0)}{2}-\frac{9}{2}\right)x^3+o(x^3)\right]$$

所以 $f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=9$，于是

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}+\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}x^2f''(0)+o(x^2)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[3+f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}x^2f''(0)+o(x^2)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[3-3+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right]=\frac{9}{2}$$

例 2.22　证明下列各题：

（1）设 $f(x)$ 在 a 点附近二次可导，且 $f''(a)\neq 0$，由微分中值定理

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\ \ 0<\theta<1$$

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$。

（2）设 $f(x)$ 在点 a 附近有 $n+1$ 阶连续导数且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$，又

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n,\ \ 0<\theta<1$$

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

（3）设 $f(x)$ 在 a 点附近有 $n-1$ 阶连续导数，且 $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，由微分中值定理 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\ 0<\theta<1$，证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=n^{-\frac{1}{n-1}}$。

（4）设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有连续的三阶导数，四阶导数存在且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，又 $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h$，$0<\theta<1$，证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

证明　（1）由泰勒公式知 $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$，与已知等式比较整理得

$$f'(a+\theta h)-f'(a)=\frac{f''(a)}{2}h+o(h)$$

应用拉格朗日定理得

$$f''(a+\theta_1\theta h)\theta h=\frac{f''(a)}{2}h+o(h)$$

即
$$\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(a)}{f''(a+\theta_1\theta h)}+\frac{o(1)}{f''(a+\theta_1\theta h)}$$

所以 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$。

（2）由泰勒公式知

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

与已知等式比较得

$$f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)$$

左边应用拉格朗日中值定理得

$$f^{(n+1)}(a+\theta_2\theta h)\theta h=\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)$$

所以
$$\theta=\frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)}{f^{(n+1)}(a+\theta_2\theta h)}\to\frac{1}{n+1}$$

（3）由泰勒公式知

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+o(h^n)$$
$$=f(a)+f'(a)h+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+o(h^n)$$

与已知等式比较整理得

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^{n-1}+o(h^{n-1})$$

上式两边对 h 求 $n-1$ 阶导数得

$$f^{(n)}(a+\theta h)\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}(a)}{n}+o(1)$$

所以
$$\theta^{n-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a+\theta h)}+\frac{o(1)}{f^{(n)}(a+\theta h)}$$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\theta^{n-1}=\dfrac{1}{n}$，即 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=n^{-\frac{1}{n-1}}$。

（4）因
$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h,\quad 0<\theta<1$$
$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{6}f'''(x_0+\theta_1 h)h^3,\quad 0<\theta_1<1$$

比较两式得
$$f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)-\frac{1}{6}f'''(x_0+\theta_1 h)h^2=0$$

记
$$F(u)=f'(x_0+\theta u)-f'(x_0)-\frac{1}{6}f'''(x_0+\theta_1 u)u^2$$
则 $F(0)=F(h)=0$ 且 $F(u)$ 可微，所以 $\exists\xi\in(0,h)$ 使 $F'(\xi)=0$，即
$$\theta f''(x_0+\theta\xi)=\frac{\xi}{3}f'''(x_0+\theta_1\xi)+\frac{\xi^2}{6}f^{(4)}(x_0+\theta_1\xi)\theta_1$$

当 $h\to 0$ 时，$\xi\to 0,\theta\xi\to 0,\theta_1\xi\to 0$，故
$$\lim_{h\to 0}\theta^2\frac{f''(x_0+\theta\xi)-f''(x_0)}{\theta\xi}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{3}f'''(x_0+\theta_1\xi)+\frac{\theta_1\xi}{6}f^{(4)}(x_0+\theta_1\xi)\right]$$
即 $(\lim\limits_{h\to 0}\theta^2)f'''(x_0)=\frac{1}{3}f'''(x_0)$，从而 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

2．利用泰勒中值定理证明含有中值点的问题

泰勒中值定理通常是联系函数与其高阶导数的桥梁，泰勒中值定理一般可以表述为：

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $\cup(x_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶的导数，则对任意给定的 $x\in\cup(x_0)$，至少存在一点 ξ，使得
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间，也可记为 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，$0<\xi<1$。

泰勒中值定理 x_0 点通常称为展开中心（展开点），x 点称为被展开点，应用泰勒中值定理的关键是选取展开中心 x_0 和被展开点 x。x_0 与 x 一般是端点、分点（区间的中点，三等分点、四等分点等）、零点、驻点、极值点、最值点、拐点。

运用泰勒中值定理时，就是将以上这些点中导数信息相对较充分的点选作展开中心，选择另一点作为被展开点。当然，如果函数在区间中的任意点处的导数信息相对较为充分，任意点也可以作为展开中心。常见的情形如例 2.23。

例 2.23　证明下列问题：

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $|f''(\xi)|\geqslant 4\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|$；

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $|f''(\xi)|\geqslant 4\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|$；

（3）设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0,f(1)=1,f(-1)=0$，则存在一点 $\xi\in(-1,1)$ 使 $f'''(\xi)=3$；

（4）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0,$ $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}=-1$，则存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)\geqslant 8$；

（5） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， 在 $(0,1)$ 内二阶可导， 且 $f(0)=f(1)=0$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}=2$，则存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)\leqslant -16$；

证明 （1）由已知，函数 f 在端点处的导数信息较为充分，可选端点作为泰勒定理的展开中心。又因为结论式含有 $b-a$ 项，所以，将 f 在端点处展开时，应该选择区间中与端点之差含 $b-a$ 项的那些点作为被展开点，区间的分点恰恰如此，因此，可以选中点作为被展开点。

由于 $f(x)$ 具有二阶导数，故泰勒中值定理可表述为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

取 $x=\dfrac{a+b}{2},x_0=a$ 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2$$

取 $x=\dfrac{a+b}{2},x_0=b$ 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+0+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2$$

其中 $a<\xi_1<\dfrac{a+b}{2}<\xi_2<b$，上述两式相减消去 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ 得

$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{8}(b-a)^2|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)|\leqslant\frac{1}{4}(b-a)^2\cdot\frac{1}{2}(|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|)$$

令 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|，|f''(\xi_2)|\}$，则

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{4}(b-a)^2|f''(\xi)|$$

即 $|f''(\xi)|\geqslant 4\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|$。

（2）由于中点处的导数信息更充分一些，故选作展开中心，选端点作为被展开点。

由于 $f(x)$ 具有二阶导数，故泰勒中值定理可表述为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

取 $x=a$， $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，得

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

取 $x=b$， $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，得

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+0+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中 $a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$，上述两式相减消去 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，类似（1）可得证。

（3）0 点的可导信息较多，可作为展开中心，结合已知，将端点作为被展开点。

由于 $f(x)$ 具有三阶导数，故泰勒中值定理可表述为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_0)^3$$

取 $x=1,x_0=0$ 得

$$1=f(1)=f(0)+f'(0)\cdot 1+\frac{1}{2!}f''(0)\cdot 1^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\cdot 1^3$$

取 $x=-1,x_0=0$ 得

$$0=f(-1)=f(0)+f'(0)\cdot(-1)+\frac{1}{2!}f''(0)\cdot(-1)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\cdot(-1)^3$$

相减消去 $f''(0)$，整理可得 $\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$。

若 $f'''(\xi_1)=f'''(\xi_2)$，则存在 $\xi=\xi_1$ 或 $\xi_2\in(-1,1)$，使结论成立。

若 $f'''(\xi_1)\neq f'''(\xi_2)$，则 $\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$ 是介于 $f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)$ 之间的介值，由导函数的介值定理知，存在 ξ 介于 ξ_1,ξ_2 之间，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$$

（4）由已知，设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值在 $(0,1)$ 内取得且为-1，即存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=-1$。

由费马定理知 $f'(x_0)=0$，这样，x_0 点的导数信息较多，应选作展开中心，结合已知，把端点选为被展开点。

由于 $f(x)$ 具有二阶导数，故泰勒中值定理可表述为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

分别取 $x=0,\ x=1$，得

$$0=f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_1){x_0}^2,$$

$$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$$

其中 $0<\xi_1<x_0<\xi_2<1$。

整理可得　$$f''(\xi_1)=\frac{2}{{x_0}^2},\quad f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$$

故当 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 时，结论成立。

若 $0<x_0<\dfrac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_1)=\dfrac{2}{{x_0}^2}\geqslant 8$；

若 $\dfrac{1}{2}<x_0<1$ 时，$f''(\xi_2)=\dfrac{2}{(1-x_0)^2}\geqslant 8$。

（5）由连续函数的最值定理知，存在 $a\in[0,1]$ 使 $f(a)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}=2$，显然 $a\neq 0,a\neq 1$，即 $a\in(0,1)$，由费马定理知 $f'(a)=0$。

由泰勒公式 $\quad f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$

分别取 $x=0,x_0=a$; $x=1,x_0=a$ 整理可得

$$f''(\xi_1)=-\frac{4}{a^2},\ f''(\xi_2)=-\frac{4}{(1-a)^2}$$

当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_1)\leqslant -16$；

当 $\dfrac{1}{2}<a<1$ 时，$f''(\xi_2)\leqslant -16$。

3．利用泰勒中值定理讨论函数的性质

例 2.24 证明下列各题：

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，$|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|\leqslant 1$，则在 $[0,2]$ 上有 $|f'(x)|\leqslant 2$；

（2）设 c 为实数，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，$\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$；

（3）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 n 阶导数，且有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty}f^{(n)}(x)=B$，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}f^{(k)}(x)=0,k=1,2,\cdots,n-1$；

（4）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，且 $f(0)=f(1),0<f(x)<1,|f''(x)|\leqslant 1$，则对任意的 $x_0\in[a,b]$，递推数列 $\{x_n\}$: $x_n=f(x_{n-1}),(n=1,2,\cdots)$ 收敛且极限为 $f(x)$ 的不动点；

（5）若函数 $f(x)$ 在 R 上二次可导，且有 $|f(x)|\leqslant M_0,|f''(x)|\leqslant M_2$，证明 $\forall x\in R$ 有 $|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$；

（6）若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上二次可导，且有 $M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|\,|\,x\in(a,+\infty)\}$，$k=0,1,2,\cdots$，$f^{(0)}(x)=f(x)$，证明 $M_1^2\leqslant 4M_0M_2$；

（7）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上三次可导，且有 $|f(x)|\leqslant M_0,|f'''(x)|\leqslant M_3$，证明 $f'(x)$, $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界。

证明 （1）任意点的导数信息较多，应选为展开中心，结合已知，把端点选为被展开点。

由于 $f(x)$ 具有二阶导数，故泰勒中值定理可表述为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

分别取 $x=0,x_0=x$ 和 $x=2,x_0=x$ 得两式相加减得

$$2f'(x)=f(2)-f(0)+\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)-\frac{1}{2}(2-x)^2f''(\xi_2)$$

所以　$2|f'(x)|\leqslant|f(2)|+|f(0)|+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}(2-x)^2=2+\dfrac{x^2+(2-x)^2}{2}\leqslant 2+2=4$。

（2）由已知和所证，任意点 x 处的导数信息较多，可选作展开中心，可选择异于 x 的任意点作为被展开点，而对于任意的 x，当 $x\to\infty$ 时，$x+1,x-1$ 都是任意点且都趋于 ∞。

由于 $f(x)$ 具有三阶导数，故泰勒中值定理可表述为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_0)^3$$

分别取 $x=x+1,x_0=x$ 和 $x=x-1,x_0=x$ 得

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1),$$

$$f(x-1)=f(x)+f'(x)\cdot(-1)+\frac{1}{2}f''(x)\cdot(-1)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\cdot(-1)^3$$

两式相加可求出

$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)-\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)]$$

两式相减可求出

$$f'(x)=\frac{1}{2}[f(x+1)-f(x-1)]-\frac{1}{12}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$$

求极限即可得证。

（3）由已知和所证，任意点 x 处的导数信息较多，可选作展开中心，可选择异于 x 的任意点作为被展开点，而对于任意的 x，当 $x\to\infty$ 时，$x+1,x+2,\cdots,x+n-1$ 都是任意点且都趋于 ∞。

写出 $f(x+1),f(x+2),\cdots,f(x+n-1)$ 在点 x 处的泰勒公式，得到关于 $f'(x)$, $f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 的线性方程组：

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}$$

$$f(x+2)=f(x)+2f'(x)+\cdots+\frac{2^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{2^nf^{(n)}(\xi_2)}{n!}$$

$$\vdots$$

$$f(x+n-1)=f(x)+(n-1)f'(x)+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{(n-1)^nf^{(n)}(\xi_{n-1})}{n!}$$

于是解此方程组可得，$f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ 都是 $f(x+1), f(x+2), \cdots, f(x+n-1)$ 与 $f^{(n)}(\xi_1), f^{(n)}(\xi_2), \cdots, f^{(n)}(\xi_{n-1})$ 的线性组合，类似（6）可得证。

（4）因为 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续知 $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上连续，故由闭区间上连续函数的最大值定理知，$\exists c \in [0,1]$，使 $|f'(c)| = \max\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$。由 $f(x)$ 在点 c 的泰勒公式得

$$f(0) = f(c) + f'(c)(0-c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-c)^2, \quad \xi_1 \in (0,c)$$

$$f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2, \quad \xi_2 \in (c,1)$$

以上两式相减，注意到 $f(0) = f(1)$ 和 $|f''(x)| \leqslant 1$ 可得

$$f'(c) = \frac{f''(\xi_1)}{2}c^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2$$

故
$$|f'(c)| \leqslant \frac{1}{2}\left[c^2 + (1-c)^2\right] \leqslant \frac{1}{2}\left[c + (1-c)\right]^2 = \frac{1}{2}$$

又因 $|f'(c)| = \max\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$，故对任意的 $x \in [0,1]$，总有 $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$。

再由拉格朗日中值定理得，$\forall x, y \in [0,1]$ 有 $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-y|$，仿照上题的证法可得证。（略）

（5）$\forall x \in R$，$\forall h > 0$，由泰勒公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(\xi\ )}{2!}h^2$$

得
$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right] - \frac{f''(\xi)}{2}h$$

从而
$$|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h$$

即 $2|f'(x)|h \leqslant 2M_0 + M_2h^2$ 或 $M_2h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geqslant 0$。

由此知，上述二次三项式的判别式满足 $4|f'(x)|^2 - 8M_0M_2 \leqslant 0$，即

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$$

（6）$\forall x \in (a, +\infty)$，$\forall h > 0$，由泰勒公式知

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x)\cdot 2h + \frac{f''(\xi)}{2!}4h^2 \text{ 或 } f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+2h) - f(x)] - f''(\xi)h$$

故
$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2h}[|f(x+2h)| + |f(x)|] + |f''(\xi)|h \leqslant \frac{1}{2h}\cdot 2M_0 + M_2h = \frac{M_0}{h} + M_2h$$

从而
$$M_1 \leqslant \frac{M_0}{h} + M_2h \text{ 或 } M_2h^2 - M_1h + M_0 \geqslant 0$$

由此知，上述二次三项式的判别式满足 $M_1^2 - 4M_0M_2 \leqslant 0$，即 $M_1^2 \leqslant 4M_0M_2$。

（7）$\forall x \in (0, +\infty)$，由泰勒公式知

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{6},$$

$$f(x+2)=f(x)+2f'(x)+2f''(x)+\frac{4f'''(\xi_2)}{4}$$

解出 $f'(x),f''(x)$，由 $f(x),f(x+1),f(x+2),f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)$ 的有界性可得证。

例 2.25　证明下列各题：

（1）设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，$f''(x)>0$，则有 $f(x)\geqslant x$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续，$f(0)=f(1)=0$，且当 $x\in(0,1)$ 时 $|f''(x)|\leqslant A$，则有 $|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$，$x\in[0,1]$；

（3）若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上恒有 $f''(x)\geqslant 0$，则对任意 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$ 有不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_2)]$$

（4）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上三次可导，且有 $|f(x)|\leqslant M_0,|f'''(x)|\leqslant M_3$，证明 $f'(x)$，$f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界；

（5）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导且 $f''(x)\geqslant 0$，证明 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$；

（6）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，$f(0)=f(1)=0$，$|f'(x)|\leqslant\frac{8}{5},|f''(x)|\leqslant\frac{8}{5}$，试给出 $|f(x)|(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的一个估计；

（7）设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0$，$|f''(x)|\leqslant|f'(x)|+|f(x)|$，证明 $\exists\delta>0$，使得在 $(-\delta,\delta)$ 内 $f(x)=0$。

证明　（1）由条件可知 $f(0)=0,f'(0)=1$，由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\geqslant x$$

（2）由泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

分别取 $x=1,x_0=x$；$x=0,x_0=x$，整理即可得证。

（3）由泰勒中值定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

因为 $f''(x)\geqslant 0$，所以

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\leqslant f(x)\qquad(*)$$

在（*）式中取 $x_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，分别取 $x=x_1,x=x_2,\cdots,x=x_n$ 相加即可。

（4）$\forall x\in(0,+\infty)$，有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{6},$$

$$f(x+2)=f(x)+2f'(x)+\frac{2^2 f''(x)}{2}+\frac{2^3 f'''(\xi_2)}{3!}$$

解出 $f'(x),f''(x)$，由 $f(x),f(x+1),f(x+2),f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)$ 的有界性可得证。

（5）因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导且 $f''(x)\geqslant 0$，由泰勒中值定理知，

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

从而有
$$f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

上式两边从 0 到 1 积分，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

（6）由题设条件将 $f(x)$ 分别在 $x=0,x=1$ 展成泰勒级数，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\quad(0\leqslant\xi\leqslant 1)$$

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-1)^2=f'(1)(x-1)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-1)^2\quad(0\leqslant\eta\leqslant 1)$$

所以
$$2f(x)=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-1)^2$$

$$\begin{aligned}2|f(x)|&=\left|f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-1)^2\right|\\&\leqslant|f'(0)x|+|f'(1)(x-1)|+\left|\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\right|+\left|\frac{f''(\eta)}{2!}(x-1)^2\right|\\&\leqslant\frac{8}{5}x+\frac{8}{5}(1-x)+\frac{1}{2}\frac{8}{5}x^2+\frac{1}{2}\frac{8}{5}(x-1)^2=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}(x^2+(x-1)^2)\\&=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}(1-2x(1-x))\leqslant\frac{8}{5}+\frac{4}{5}=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

故 $|f(x)|\leqslant\frac{6}{5}(0\leqslant x\leqslant 1)$。

（7）为了证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内恒为 0，将 $f(x),f'(x)$ 在 $x=0$ 处展开为泰勒中值定理，注意到 $f(0)=f'(0)=0$，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=\frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

$$f'(x)=f'(0)+f''(\eta)x=f''(\eta)x$$

从而
$$|f'(x)|+|f(x)|=\frac{1}{2}|f''(\xi)x^2|+|f''(\eta)x|$$

限定 $x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$，则 $|f'(x)|+|f(x)|$ 在 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 上非负连续有最大值 M，不妨设最大值点为 $x_0\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$。而

$$\begin{aligned}0\leqslant M &=|f'(x_0)|+|f(x_0)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_0)x_0^{\ 2}|+|f''(\eta_0)x_0|\\&\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2|f''(\xi_0)|+\frac{1}{4}|f''(\eta_0)|\leqslant\frac{1}{4}(|f''(\xi_0)|+|f''(\eta_0)|)\\&\leqslant\frac{1}{4}[(|f'(\xi_0)|+|f(\xi_0)|)+(|f'(\eta_0)|+|f(\eta)|)]\leqslant\frac{1}{4}(M+M)=\frac{M}{2}\end{aligned}$$

故 $M=0$，得证。

2.5　微分中值定理的推广

2.5.1　罗尔中值定理的推广

定理 2.1　（罗尔中值定理）

若函数 $f(x)$ 满足如下条件：

（1） $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续；

（2） $f(x)$ 在开区间(a,b)内可导；

（3） $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$ 。

1．把连续区间推广为有限开区间、有限半开半闭区间、无限区间，把两个端点的值推广为 $+\infty$ **、** $-\infty$

推广 2.1　若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a+0)=f(b-0)=A$ （ A 为有限值或 $+\infty$， $-\infty$ ），则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$ 。

证明　① 若 A 为有限值，

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内为常数，则对任意的 $\xi\in(a,b)$ 都有 $f'(\xi)=0$ 。

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内不恒为常数，令

$$F(x)=\begin{cases}f(x),x\in(a,b)\\A,x=a,b\end{cases},$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

故由罗尔中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，而在 (a,b) 内 $F(x)=f(x)$，从而 $f'(\xi)=0$ 。

② 若 A 为 $+\infty$，因 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，由保号性知，对充分大的 M，$\exists x_1\in U^+(a)$， $x_2\in U^-(b)$ 使得 $f(x_1)>M$， $f(x_2)>M$ 。

因 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上能取到最小值，且最小值在 (x_1,x_2)

内某点ξ处取到，又$f(x)$在ξ点可导，故由费马定理得$f'(\xi)=0$。

③ 若A为$-\infty$，类似②可证。

推广 2.2

（1）若函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$（$A$为有限值或$+\infty$，$-\infty$），则至少存在一点$\xi\in(a,+\infty)$，使$f'(\xi)=0$。

（2）若函数$f(x)$在$(-\infty,b)$上可导，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$（$A$为有限值或$+\infty$，$-\infty$），则至少存在一点$\xi\in(-\infty,b)$，使$f'(\xi)=0$。

证明 （1）**证法一** ① 若A为有限值，若$f(x)$在$(a,+\infty)$内是常数，则得证。

若$f(x)$在$(a,+\infty)$内不是常数，不妨设$x_0\in(a,+\infty)$，使$f(x_0)>A$，即

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=A<f(x_0)$$

由保号性知，$\exists x_1\in(a,x_0)$使$f(x_1)<f(x_0)$，$\exists x_2\in(x_0,+\infty)$使$f(x_2)<f(x_0)$。

又$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，从而取到最大值，但由上可知，最大值不会在端点取到，故在(x_1,x_2)内部一点ξ取到，由费马定理得证。

② 若A为$+\infty$，因$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，由保号性知，对充分大的$M$，$\exists x_1\in U^+(a)$，$x_2\in U^-(+\infty)$使得$f(x_1)>M$，$f(x_2)>M$。

因$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，故$f(x)$在$[x_1,x_2]$上能取到最小值，且最小值在(x_1,x_2)内某点ξ处取到，又$f(x)$在ξ点可导，故由费马定理得$f'(\xi)=0$。

③ 若A为$-\infty$，类似②可证。

证法二 做变换$x=\dfrac{t\cdot(m-a)}{m-t},a<t<m$，其中$m$为正数。

令
$$g(t)=f\left[\frac{t\cdot(m-a)}{m-t}\right]$$

则$g(t)$在(a,m)上满足推广 2.1 的全部条件，故存在$\tau\in(a,m)$使$g'(\tau)=0$，而

$$g'(\tau)=f'\left[\frac{\tau\cdot(m-a)}{m-\tau}\right]\cdot\frac{m(m-a)}{(m-\tau)^2},\frac{m(m-a)}{(m-\tau)^2}>0$$

于是取$\xi=\dfrac{\tau\cdot(m-a)}{m-\tau}\in(a,+\infty)$，就有$f'(\xi)=0$。

（2）**证法一** 类似于（1）可证（略）。

证法二 做变换$x=\dfrac{t\cdot(b-s)}{t-s},s<t<b$，其中$s$为负数。令

$$g(t)=f\left[\frac{t\cdot(b-s)}{t-s}\right]$$

则$g(t)$在(s,b)上满足推广 2.1 的全部条件，故存在$\tau\in(s,b)$使$g'(\tau)=0$，而

$$g'(\tau)=f'\left[\frac{\tau\cdot(b-s)}{\tau-s}\right]\cdot\frac{(-s)(b-s)}{(\tau-s)^2},\quad\frac{(-s)(b-s)}{(\tau-s)^2}>0$$

于是取 $\xi=\dfrac{\tau\cdot(b-s)}{\tau-s}\in(-\infty,b)$，就有 $f'(\xi)=0$。

若把推论 2.2 中的区间改为 $[a,+\infty)$、$(-\infty,b]$，结论当然成立。

推广 2.3　若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$ 为有限值或 $+\infty,-\infty$），则至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使 $f'(\xi)=0$。

证明　① 若 A 为有限值，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是常数，则得证。

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是常数，不妨设 $x_0\in(a,+\infty)$，使 $f(x_0)>A$，即

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A<f(x_0)$$

由保号性知，$\exists M>|x_0|$，使得 $|x|\geqslant M$ 时有 $f(x)<f(x_0)$。又因 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上连续，从而取到最大值，但由上可知，最大值不会在端点取到，故在 $(-M,M)$ 内部一点 ξ 取到，由费马定理得证。

② 若 A 为 $+\infty$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是常数，则得证。

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是常数，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$。

由保号性知，对充分大的 K，$\exists M>0$，使得 $|x|\geqslant M$ 时有 $f(x)>K$。又因 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上连续，从而取到最小值，由费马定理得证。

③ 若 A 为 $-\infty$，类似（2）可证。

另证：做变换 $x=\tan t$，令 $g(t)=f(\tan t)$，则 $g(t)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上满足推广 2.1.1 的全部条件，故存在 $\tau\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 使 $g'(\tau)=0$，而 $g'(\tau)=f'(\tan\tau)\cdot\sec^2\tau$，$\sec^2\tau>0$，于是取 $\xi=\tan\tau\in(-\infty,+\infty)$，就有 $f'(\xi)=0$。

2．把在开区间内可导的条件推广

推广 2.4　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内除有限个点的导数为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 外，其他点的导数都存在，则至少存在一点 $\xi\in(a,+\infty)$，使 $f'(\xi)=0$。

证明　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有最大值与最小值，分别用 M 与 m 表示，现分两种情况来讨论：

（1）当 $M=m$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为常数，因此开区间 (a,b) 内任意点的导数均为 0，因此定理结论成立。

（2）当 $M\neq m$ 时，由条件 $f(a)=f(b)$ 可知，函数的最大值和最小值中至少有一个是在开区间 (a,b) 内的某点 ξ 取得，从而 ξ 是 $f(x)$ 的极值点，由费马定理知 $f'(\xi)=0$。

下面证明极值点不可能在导数为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的点取到。

不妨设 $M\neq f(a)$（$m\neq f(a)$ 的情况类似），$x_0\in(a,b)$ 且 $f'(x_0)=+\infty$（$f'(x_0)=-\infty$ 的情况类似），即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$$

所以存在 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$，当 $x\in\bigcup(x_0,\delta)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，从而当 $x<x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$，当 $x>x_0$ 时，$f(x)>f(x_0)$，所以 $M\neq f(x_0)$。

推广 2.5 若函数 $f(x)$ 满足如下条件：

（1）$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）$f(x)$ 在开区间(a,b)内左右导数存在且连续（即 f'_- 与 f'_+ 存在且连续）；

（3）$f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)=0$（或 $f'_-(\xi)=0$）。

证明 只对 $f(x)$ 存在连续的右导数加以证明，左导数的情况类似可证。

由 $f(x)$ 在闭区间$[a，b]$上连续知，所以有最大值 M 与最小值 m。

（1）如果 $M=m$，即 $f(x)$ 在$[a,b]$上为常数，则(a,b)内任意点的右导数均为 0，当然有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)=0$。

（2）如果 $M\neq m$，$f(x)$在$[a,b]$上不为常数，由条件 $f(a)=f(b)$可知，最大值和最小值中至少有一个是在开区间(a,b)内某点取得，不妨设 $\alpha\in(a,b)$ 为 $f(x)$ 的最小值点，则

$$f'_+(\alpha)=\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\geqslant 0$$

再取一点 $c(a<c<\alpha)$，由 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续知 $f(x)$ 在 $[c,\alpha]$ 上连续，而 α 为 $f(x)$ 在$[a，b]$上的最小值，当然 α 也是 $f(x)$ 在 $[c,\alpha]$ 上的最小值，故 $f(x)$ 在 $[c,\alpha]$ 上的最大值必定在 $[c,\alpha]$ 内部一点 $\beta(c<\beta<\alpha)$ 达到，则

$$f'_+(\beta)=\lim_{x\to\beta^+}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\leqslant 0$$

故得到 $f'_+(x)$ 在 $[\beta,\alpha]$ 上连续且 $f'_+(\beta)\leqslant 0$、$f'_+(\alpha)\geqslant 0$，由连续函数的介值定理得，至少存在一点 $\xi\in(\beta,\alpha)\subset(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)=0$。

推广 2.6 若函数 $f(x)$ 满足如下条件：

（1）$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）$f(x)$ 在开区间(a,b)内左右导数存在（即 f'_- 与 f'_+ 存在）；

（3）$f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$及非负数 $p,q,p+q=1$，使得 $pf'_+(\xi)+qf'_-(\xi)=0$。

证明 由 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续知，有最大值 M 与最小值 m。

（1）如果 $M=m$，即 $f(x)$ 在$[a,b]$上为常数，则(a,b)内恒有

$$f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)=0$$

此时在(a,b)内任取一点 ξ 及任意非负数 $p,q,p+q=1$，都有

$$pf'_+(\xi)+qf'_-(\xi)=0$$

（2）如果 $M\neq m$，$f(x)$ 在$[a,b]$上不为常数，由条件 $f(a)=f(b)$可知，最大值和最小值中至少有一个是在开区间(a,b)内某点 ξ 取得，不妨设 ξ 为 $f(x)$ 的最小值点。

① 若 $f_+'(\xi)=f_-'(\xi)$，即 $f(\xi)$ 存在，则由费马定理知 $f'(\xi)=f_+'(\xi)=f_-'(\xi)=0$，此时任意非负数 $p,q,p+q=1$，都有 $pf_+'(\xi)+qf_-'(\xi)=0$。

② 若 $f_+'(\xi)\neq f_-'(\xi)$，则

$$f_+'(\xi)=\lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0,\quad f_-'(\xi)=\lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0,$$

且 $f_+'(\xi),f_-'(\xi)$ 不能同时等于 0，不妨设 $f_+'(\xi)>0$，令

$$p=\frac{-f_-'(\xi)}{f_+'(\xi)-f_-'(\xi)},\quad q=\frac{f_+'(\xi)}{f_+'(\xi)-f_-'(\xi)}$$

则 $p\geqslant 0,q>0,p+q=1$ 且

$$pf_+'(\xi)+qf_-'(\xi)=\frac{-f_-'(\xi)f_+'(\xi)}{f_+'(\xi)-f_-'(\xi)}+\frac{f_-'(\xi)f_+'(\xi)}{f_+'(\xi)-f_-'(\xi)}=0$$

3．把一元函数向多元函数推广

推广 2.7　（二元函数的罗尔定理）

设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续，在开区域 D 内可微且在 D 的边界 S 上函数值相等，即对任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S$ 有 $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$，则在 D 内至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\mathrm{d}f(x,y)\Big|_{(\xi,\eta)}=f_x(x,y)\Big|_{(\xi,\eta)}\mathrm{d}x+f_y(x,y)\Big|_{(\xi,\eta)}\mathrm{d}y=0$$

证明　因为 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续，根据二元函数的最大最小值定理知，$f(x,y)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上取到最大值 M 和最小值 m，分两种情形证之。

（1）如果 $M=m$，则 $f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上取得相同的数值，故在任意点 (ξ,η)，都能使得 $\mathrm{d}f(x,y)\Big|_{(\xi,\eta)}=0$。

（2）如果 $M>m$，则 M 与 m 至少有一个不等于 $f(x,y)$ 在 D 的边界 S 上的数值，不妨设 $f(x,y)\neq M$，则在 D 内至少存在一点 (ξ,η)，使得 $f(\xi,\eta)=M$，由费尔马定理知，$\mathrm{d}f(x,y)\Big|_{(\xi,\eta)}=0$。

2.5.2　拉格朗日中值定理的推广

定理 2.2　（拉格朗日中值定理）

若函数 $f(x)$ 满足如下条件：

（1）$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）$f(x)$ 在开区间(a,b)内可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

1．把连续区间推广为有限开区间、有限半开半闭区间、无限区间

推广 2.8　若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都存在，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}$$

证明 令
$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ f(b-0), & x=b \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $F'(x)=f'(x)$，故由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

即
$$f'(\xi)=\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}$$

推广 2.9 （1）若函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在，则至少存在一点 $\xi\in(a,+\infty)$，使得

$$\frac{(b_1-a+\xi)^2}{(b_1-a)\cdot b_1}f'(\xi)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to a^+}f(x)}{b_1-a}$$

其中 $b_1>\max\{a,0\}$。

（2）若函数 $f(x)$ 在开区间 $(-\infty,b)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在，则至少存在一点 $\xi\in(-\infty,b)$，使得

$$\frac{(a_1-b+\xi)^2}{(a_1-b)\cdot a_1}f'(\xi)=\frac{\lim\limits_{x\to b^-}f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)}{b-a_1}$$

其中 $a_1<\min\{b,0\}$。

证明 （1）令 $b_1>\max\{a,0\}$，且 $x=\dfrac{(b_1-a)t}{b_1-t}$，$t\in(a,b_1)$，则复合函数 $F(t)=f\left[\dfrac{(b_1-a)t}{b_1-t}\right]$在开区间 (a,b_1) 内可导，其导数为

$$F'(t)=f'\left[\frac{(b_1-a)t}{b_1-t}\right]\cdot\frac{(b_1-a)b_1}{(b_1-t)^2}$$

又因 $\lim\limits_{t\to a^+}F(t)=\lim\limits_{t\to a^+}f\left[\dfrac{(b_1-a)t}{b_1-t}\right]=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{t\to b_1^-}F(t)=\lim\limits_{t\to b_1^-}f\left[\dfrac{(b_1-a)t}{b_1-t}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在，故由推广 2.8 知，存在 $\eta\in(a,b_1)$，使得

$$F'(\eta)=\frac{\lim\limits_{t\to b_1^-}F(t)-\lim\limits_{t\to a^+}F(t)}{b_1-a}$$

即
$$f'\left[\frac{(b_1-a)\eta}{b_1-\eta}\right]\cdot\frac{(b_1-a)b_1}{(b_1-\eta)^2}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to a^+}f(x)}{b_1-a}$$

令 $\xi=\dfrac{(b_1-a)\eta}{b_1-\eta}$，则 $\eta\in(a,b_1)$ 时 $\xi\in(a,+\infty)$，使得

$$\frac{(b_1-a+\xi)^2}{(b_1-a)\cdot b_1}f'(\xi)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to a^+}f(x)}{b_1-a}$$

（2）令 $a_1<\min\{0,b\}$，且 $x=\dfrac{(b-a_1)t}{t-a_1}$，$t\in(a_1,b)$，则复合函数 $F(t)=f\left[\dfrac{(b-a_1)t}{t-a_1}\right]$ 在开区间 (a_1,b) 内可导，其导数为

$$F'(t)=f'\left[\frac{(b-a_1)t}{t-a_1}\right]\cdot\frac{(a_1-b)a_1}{(t-a_1)^2}$$

又因 $\lim\limits_{t\to b^-}F(t)=\lim\limits_{t\to b^-}f\left[\dfrac{(b-a_1)t}{t-a_1}\right]=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{t\to a_1^+}F(t)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在，故由推广 2.8 知，存在 $\eta\in(a,b_1)$，使得

$$F'(\eta)=\frac{\lim\limits_{t\to b^-}F(t)-\lim\limits_{t\to a_1^+}F(t)}{b-a_1}$$

即

$$f'\left[\frac{(b-a_1)\eta}{\eta-a_1}\right]\cdot\frac{(a_1-b)a_1}{(\eta-a_1)^2}=\frac{\lim\limits_{x\to b^-}f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)}{b-a_1}$$

令 $\xi=\dfrac{(b-a_1)\eta}{\eta-a_1}$，则 $\eta\in(a_1,b)$ 时 $\xi\in(-\infty,b)$，使得

$$\frac{(a_1-b+\xi)^2}{(a_1-b)\cdot a_1}f'(\xi)=\frac{\lim\limits_{x\to b^-}f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)}{b-a_1}$$

推广 2.10　若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在，则至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得

$$(1+\xi^2)f'(\xi)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)}{\pi}$$

证明　令 $x=\tan t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则复合函数 $F(t)=f(\tan t)$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，其导数为 $F'(t)=f'(\tan t)\cdot\sec^2 t$。又因 $\lim\limits_{t\to-\frac{\pi}{2}^+}F(t)=\lim\limits_{t\to-\frac{\pi}{2}^+}f(\tan t)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}F(t)=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}f(\tan t)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在，故由推广 2.8 知，存在 $\eta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$F'(\eta)=\frac{\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}F(t)-\lim\limits_{t\to-\frac{\pi}{2}^+}F(t)}{\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}$$

即
$$f'(\tan\eta)\cdot\sec^2\eta=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)}{\pi}$$

令$\xi=\tan\eta$，则$\eta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$时$\xi\in(-\infty,+\infty)$，并且$\sec^2\eta=1+\tan^2\eta=1+\xi^2$，所以
$$(1+\xi^2)f'(\xi)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)}{\pi}$$

2．把在开区间内可导的条件推广

推广 2.11 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内除有限个点的导数为$+\infty$和$-\infty$外，其他点的导数都存在，则在(a,b)内至少有一点$\xi\in(a,b)$，使得函数在该点的导数为
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明 做辅助函数 $$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$
则$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内$f(x)$的可导点处$F(x)$也可导，且
$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

函数$f(x)$的导数为$+\infty$和$-\infty$的点，相应地$F(x)$在这些点的导数也为$+\infty$和$-\infty$，又
$$F(a)=F(b)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

由罗尔中值定理的推广知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

推广 2.12 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内除仅有的n个点外都可导，则存在$n+1$个点$\xi_i\in(a,b)$和$n+1$个常数$\lambda_i\in(0,1)$，其中$\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$，$i=1,2,\cdots,n+1$，使得
$$\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f'(\xi_i)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明 设$c_1,c_2,\cdots,c_n$为$f(x)$的n个不可导点，且$a<c_1<c_2<\cdots<c_n<b$，令$a=c_0$，$b=c_{n+1}$，则$[a,b]=\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}[c_{i-1},c_i]$，$f(x)$在每个小区间$[c_{i-1},c_i]$上连续，在$(c_{i-1},c_i)$内可导。

由拉格朗日中值定理知，$\exists\xi_i\in(c_{i-1},c_i)$，使得
$$f'(\xi_i)=\frac{f(c_i)-f(c_{i-1})}{c_i-c_{i-1}},\quad i=1,2,\cdots,n+1$$

变形为 $\dfrac{c_i-c_{i-1}}{b-a}\cdot f'(\xi_i)=\dfrac{f(c_i)-f(c_{i-1})}{b-a}$，令 $\lambda_i=\dfrac{c_i-c_{i-1}}{b-a}$，显然 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f'(\xi_i)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

推广 2.13　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(b)=f(a)$，在 (a,b) 内存在左、右导数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 和常数 $p\geqslant 0,q\geqslant 0,p+q=1$，使得

$$pf'_-(\xi)+qf'_+(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明　先证存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'_-(x_0)\cdot f'_+(x_0)\leqslant 0$。

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(b)=f(a)$ 知，$f(x)$ 必在 (a,b) 内取得至少一个最值，不妨设取到最大值，最大值点为 x_0，$f(x_0)=M$。

则
$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,\quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$$

即 $f'_-(x_0)\cdot f'_+(x_0)\leqslant 0$。

再证存在 $\xi\in(a,b)$ 和常数 $p\geqslant 0,q\geqslant 0,p+q=1$，使得

$$pf'_-(\xi)+qf'_+(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

做辅助函数　$F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

则由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内存在左、右导数知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内存在左、右导数 $F'_-(x)$ 和 $F'_+(x)$。又 $F(b)=F(a)=0$，故由上述结论得，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'_-(\xi)\cdot F'_+(\xi)\leqslant 0$。不妨设 $F'_-(\xi)\geqslant 0$，$F'_+(\xi)\leqslant 0$，则

$$F'_-(\xi)=f'_-(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0,\quad F'_+(\xi)=f'_+(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant 0$$

即
$$f'_-(\xi)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant f'_+(\xi)$$

设
$$G(x)=xf'_-(\xi)+(1-x)f'_+(\xi)$$

则 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $G(0)=f'_+(\xi)$，$G(1)=f'_-(\xi)$，由连续函数的介值定理知，$\exists p\in(0,1)$，使得

$$G(p)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

即
$$pf'_-(\xi)+(1-p)f'_+(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

令 $q=1-p$，则得

$$pf'_-(\xi)+qf'_+(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

3．把一阶可导向多阶可导推广

拉格朗日中值定理可以写为：

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$x,x+h\in[a,b],h\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(x+h)-f(x)=f'(\xi)h$。

上述定理可以看成是一阶拉格朗日中值定理，可以推广为二阶、n 阶的拉格朗日中值定理。

推广 2.14 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可微，$x,x+2h\in[a,b],h\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)=f''(\xi)h^2$$

推广 2.15 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 n 阶可微，$x,x+nh\in[a,b],h\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x+nh)-C_n^1 f[x+(n-1)h]+C_n^2 f[x+(n-2)h]+\cdots+(-1)^n C_n^n f(x)=f^{(n)}(\xi)h^n$$

即
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f[x+(n-k)h]=f^{(n)}(\xi)h^n$$

注 推论 2.14、2.15 的证明详见“李光绪．Lagrange 微分学中值定理的推广．四川师范学院学报，1989，10．

4．把一元函数向多元函数推广

推广 2.16（二元函数的拉格朗日中值定理）

若二元函数 $f(x)$ 在凸区域 $D\subset R^2$ 上连续，在 D 的所有内点处可微，则对 D 内任意两点 $P(a,b)$，$Q(a+h\ ,b+k)\in\operatorname{int}D$，存在 θ（$0<\theta<1$），使得

$$f(a+h\ ,b+k)-f(a,b)=f_x(a+\theta h\ ,b+\theta k)h+f(a+\theta h\ ,b+\theta k)k\text{。}$$

证明 令 $\varPhi(t)=f(a+th\ ,b+tk)$，它是定义在 $[0,1]$ 上的一元函数，满足一元函数拉格朗日中值定理的条件，故存在 θ（$0<\theta<1$），使得 $\varPhi(1)-\varPhi(0)=\varPhi'(\theta)$，由复合函数的求导法则得

$$\varPhi'(\theta)=f_x(a+\theta h\ ,b+\theta k)h+f(a+\theta h\ ,b+\theta k)k$$

推广 2.17（n 元函数的拉格朗日中值定理）

如果 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的邻域 G 内有一阶连续偏导数，则对 G 内任意一点 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，存在 $\theta,0<\theta<1$，使得

$$f(b_1,b_2,\cdots,b_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}[a_i+\theta(b_i-a_i)]\cdot(b_i-a_i)$$

证明 令 $F(t)=f[a_1+t(b_1-a_1),a_2+t(b_2-a_2),\cdots,a_n+t(b_n-a_n)]$

则 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，并且

$$F'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}[a_i+\theta(b_i-a_i)]\cdot(b_i-a_i)$$

对 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 上应用拉格朗日中值定理得

$$f(b_1,b_2,\cdots,b_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}[a_i+\theta(b_i-a_i)]\cdot(b_i-a_i)$$

2.5.3　柯西中值定理的推广

定理 2.3（柯西中值定理）

若函数 $f(x), g(x)$ 满足如下条件：

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）对任意的 $x \in (a,b), g'(x) \neq 0$；

（4）$g(a) \neq g(b)$，

则至少存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

1．把连续区间推广为有限开区间

推广 2.18　若函数 $f(x), g(x)$ 在(a,b)内可导，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$、$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$、$\lim\limits_{x\to b^-} g(x)$ 都存在，且 $g'(x) \neq 0, x \in (a,b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b-0)-f(a+0)}{g(b-0)-g(a+0)}$$

证明　首先设 $g(a+0) \neq g(b-0)$，否则若 $g(a+0) = g(b-0)$，则由拉格朗日中值定理的推广知，存在 $\eta \in (a,b)$，使得

$$g'(\eta) = \frac{g(b-0)-g(a+0)}{b-a} = 0$$

与题设矛盾。

做辅助函数　$$F(x) = f(x) - \frac{f(b-0)-f(a+0)}{g(b-0)-g(a+0)} g(x)$$

则 $F(x)$ 在 (a,b) 内可导，且

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \frac{f(a+0)g(b-0)-f(b-0)g(a+0)}{g(b-0)-g(a+0)} = \lim_{x\to b^-} F(x)$$

由罗尔中值定理的推广知，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $F'(\xi) = 0$，故得证。

2．把函数的个数推广

可以将柯西中值定理变形为 $\dfrac{-1}{f(b)-f(a)} f'(\xi) + \dfrac{1}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0$，当然需要 $f(a) \neq f(b)$。

显然上述公式具有对称性，所以可以考虑将定理中的函数个数推广到更多函数的情形。

推广 2.19　设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的三个函数，α, β, γ 是三个实数且 $\alpha+\beta+\gamma = 0$，若 $f(x), g(x), h(x)$ 满足：

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3） $f(a)\neq f(b),g(a)\neq g(b),h(a)\neq h(b)$ ，
则至少存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\alpha}{f(b)-f(a)}f'(\xi)+\frac{\beta}{g(b)-g(a)}g'(\xi)+\frac{\gamma}{h(b)-h(a)}h'(\xi)=0 \text{。}$$

证 明 设 $F(x)=\alpha[g(b)-g(a)][h(b)-h(a)][f(x)-f(a)]+\beta[f(b)-f(a)][h(b)-h(a)][g(x)-g(a)]+\gamma[f(b)-f(a)][g(b)-g(a)][h(x)-h(a)]$。

显然 $F(x)$ 闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $F(b)=F(a)=0$ 。

故由罗尔中值定理得至少存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$ ，变形可证。

推广 2.20 若函数 $f_i(x),(i=1,2,\cdots,n)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的 n 个函数，$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个实数且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ ，若 $f_i(x),(i=1,2,\cdots,n)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3） $f_i(a)\neq f_i(b)(i=1,2,\cdots,n)$ ，

则至少存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{f_i(b)-f_i(a)}f_i'(\xi)=0$ 。

证明 做辅助函数 $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[f_j(b)-f_j(a)\right]\right)\left[f_i(x)-f_i(a)\right]$ ，可证。

3．把在开区间内可导的条件推广

推广 2.21 若函数 $f(x)$ 、$g(x)$ 满足：

（1）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f_-'(x)$ 与 $f_+'(x)$ 存在；

（2） $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$ ，

则存在 $\xi\in(a,b)$ 和常数 $p\geqslant 0,q\geqslant 0,p+q=1$ ，使得

$$p\frac{f_+'(\xi)}{g_+'(\xi)}+q\frac{f_-'(\xi)}{g_-'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

证明 因在 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$，故 $g(b)-g(a)\neq 0$ 。

做辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$$

由 $f_-'(x)$ 、 $f_+'(x)$ 存在且可导知

$$F_+'(x)=f_+'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g_+'(x),$$

$$F_-'(x)=f_-'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g_-'(x)$$

又 $F(a)=F(b)$ ，故由罗尔中值定理的推广得：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 及非负数 $p,q,p+q=1$ ，使得 $pF_+'(\xi)+qF_-'(\xi)=0$ 。

注意到 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$ ，所以 $g'(\xi)=g_+'(\xi)=g_-'(\xi)\neq 0$ 。

故综合上述式子可得

$$p\frac{f'_+(\xi)}{g'_+(\xi)}+q\frac{f'_-(\xi)}{g'_-(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

推广 2.22　若函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足：

（1）在 $[a,b]$ 上连续；

（2）在 (a,b) 内存在左、右导数（即 $f'_-(x)$、$f'_+(x)$、$g'_-(x)$、$g'_+(x)$ 存在），则存在 $\xi\in(a,b)$ 和常数 $p\geqslant 0,q\geqslant 0,p+q=1$，使得

$$[pf'_+(\xi)+qf'_-(\xi)][g(b)-g(a)]=[pg'_+(\xi)+qg'_-(\xi)][f(b)-f(a)]$$

证明　做辅助函数

$$F(x)=[f(x)-f(a)][g(b)-g(a)]-[g(x)-g(a)][f(b)-f(a)]$$

则 $F(a)=F(b)=0$ 且 $F'_-(x),F'_+(x)$ 存在：

$$F'_+(x)=f'_+(x)[g(b)-g(a)]-g'_+(x)[f(b)-f(a)],$$

$$F'_-(x)=f'_-(x)[g(b)-g(a)]-g'_-(x)[f(b)-f(a)]$$

故由罗尔中值定理的推广得，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$及非负数 $p,q,p+q=1$，使得

$$pF'_+(\xi)+qF'_-(\xi)=0$$

即

$$pf'_+(x)[g(b)-g(a)]-pg'_+(x)[f(b)-f(a)]+$$
$$qf'_-(x)[g(b)-g(a)]-qg'_-(x)[f(b)-f(a)]=0$$

整理可得证。

可以将推广 2.22 变形为 $-\dfrac{pf'_+(\xi)+qf'_-(\xi)}{f(b)-f(a)}+\dfrac{pg'_+(\xi)+qg'_-(\xi)}{g(b)-g(a)}=0$，要求 $f(a)\neq f(b)$，$g(a)\neq g(b)$。

显然上述公式具有对称性，所以可以考虑将定理中的函数个数推广到更多函数的情形。

推广 2.23　设函数 $f(x),g(x),h(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的三个函数，α,β,γ 是三个实数且 $\alpha+\beta+\gamma=0$，若函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 满足：

（1）在 $[a,b]$ 上连续；

（2）在 (a,b) 内存在左、右导数（即 $f'_-(x)$、$f'_+(x)$、$g'_-(x)$、$g'_+(x)$、$h'_-(x)$、$h'_+(x)$ 存在）；

（3）$f(a)\neq f(b)$、$g(a)\neq g(b)$、$h(b)\neq h(a)$，

则存在 $\xi\in(a,b)$ 和常数 $p\geqslant 0,q\geqslant 0,p+q=1$，使得

$$\alpha\frac{pf'_+(\xi)+qf'_-(\xi)}{f(b)-f(a)}+\beta\frac{pg'_+(\xi)+qg'_-(\xi)}{g(b)-g(a)}+\gamma\frac{ph'_+(\xi)+qh'_-(\xi)}{h(b)-h(a)}=0$$

证明　做辅助函数

$$\begin{aligned}F(x)=\alpha[f(x)-f(a)][g(b)-g(a)][h(b)-h(a)]+\\ \beta[g(x)-g(a)][f(b)-f(a)][h(b)-h(a)]+\\ \gamma[h(x)-h(a)][f(b)-f(a)][g(b)-g(a)]\end{aligned}$$

则 $F(a)=F(b)=0$ 且 $F'_-(x),F'_+(x)$ 存在。故由罗尔中值定理的推广得，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$及非负数 $p,q,p+q=1$，使得 $pF'_+(\xi)+qF'_-(\xi)=0$。代入并整理后可得证。

推广 2.24 若函数 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 为定义在$[a,b]$上的n个函数，$\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是n个实数且$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=0$，若 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足：

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内 $f'_{i+}(x),f'_{i\_}(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 存在；

（3）$f_i(a)\neq f_i(b)(i=1,2,\cdots,n)$，

则存在$\xi\in(a,b)$和常数 $p\geqslant 0,q\geqslant 0,p+q=1$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{pf'_{i+}(\xi)+qf'_{i\_}(\xi)}{f_i(b)-f_i(a)}=0$$

证明 做辅助函数 $F(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\left[f_j(b)-f_j(a)\right]\right)\left[f_i(x)-f_i(a)\right]$，可得证。

4．把一阶可导向多阶可导推广

柯西中值定理（定理 2.3）一般称为一阶柯西中值定理，我们可以推广为二阶、n阶的柯西中值定理。

推广 2.25 若函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$g''(x)\neq 0$，则存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)}{g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+g(a)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

推广 2.26 若函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 n 阶可导，且 $g'(x),g''(x),\cdots,g^{(n)}(x)$ 均不为零，则存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^nC_n^kf\left[b-\dfrac{k(b-a)}{n}\right]}{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^nC_n^kg\left[b-\dfrac{k(b-a)}{n}\right]}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}$$

证明详见：杜家祥．柯西中值定理与拉格朗日中值定理的高阶形式．淮北煤师院学报，2001，（12）．

5．把一元函数向多元函数推广

推广 2.27（二元函数的柯西中值定理）

若二元函数 $f(x)$，$g(x)$ 在凸区域 $D\subset R^2$ 上连续，在 D 的所有内点处有连续的偏导数，则对 D 内任意两点 $P(a,b)$，$Q(a+h\,,b+k)\in \operatorname{int} D$，存在 θ（$0<\theta<1$），使得

$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{g(a+h,b+k)-g(a,b)}=\frac{f_x'(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y'(a+\theta h,b+\theta k)k}{g_x'(a+\theta h,b+\theta k)h+g_y'(a+\theta h,b+\theta k)k}$$

同样，也可得到 n 元函数的柯西中值定理（这里省略）。

关于泰勒中值定理的推广本书不再讨论，有兴趣的读者可参见相关文献。

参 考 文 献

[1] 卢玉峰．微分中值定理历史与发展．高等数学研究，2008，(5).

[2] 路见可．关于微分中值定理的思考．高等数学研究，2002，(3).

[3] 闵兰，陈晓敏．几个微分中值定理之异同—从罗尔定理到泰勒定理．西南师范大学学报（自然科学版），2009，(12).

[4] 蔡子华．泰勒中值定理的又一证明．工科数学，1992，(8).

[5] Abian A.A．*ultimate proof of Rolle theorem*．*Amer.Math.Monthly*，1979，(86).

[6] Samelson H．*on Rolle's theorm*．*Amer.Math.Monthly*，1979，(86).

[7] 雷燕，李庆芹．Rolle 定理证明及应用的探讨．昆明冶金高等专科学校学报，2011，(9).

[8] 朱永庚．Rollle 定理的一个新证明．陕西师大学报自然科学版，1980－1981，合刊.

[9] 冯平道．Rolle 定理的一个证明．宁夏大学学报：自然科学版，1987，(2).

[10] 李万军．Rolle 中值定理的一个新证明．宜宾学院学报，2004，(3).

[11] 胡璋剑．Lagrange 中值定理的另一证明．湖州师专学报，1995，(6).

[12] 王有文．拉格朗日中值定理的另一种证明．忻州师范学院学报，2012，(4).

[13] 张明波，王娅纷．利用闭区间套定理证明 Lagrange 中值定理．长江大学学报：自然科学版，2010，(6).

[14] 黄德丽．用五种方法证明柯西中值定理．湖州师范学院学报，2003，(6).

[15] 邹兆南，谭远顺．Cauchy 微分中值定理的多种探究式证明法．重庆交通大学学报：自然科学版，2009，(10).

[16] 钟朝艳．Cauchy 中值定理与 Taylor 定理的新证明．曲靖师专学报，1999，(3).

[17] 黄光武．用罗尔定理证明泰勒中值定理．重庆师范学院学报：自然科学版，2000，(6).

[18] 蔡子华．泰勒中值定理的又一证明．工科数学，1992，(8).

[19] 钟朝艳．Cauchy 中值定理与 Taylor 定理的新证明．曲靖师专学报，1999，(3).

[20] 吕中学．再谈柯西中值定理．高等数学研究，2003，(3).

[21] 王庆东，侯海军．关于泰勒定理的中心的选择．高等数学研究，2006，(5).

[22] 陆晓朋，王能超．泰勒公式通古今—微积分史学习札记之二．高等数学研究，1998，(9).

[23] 鲁春铭，刘颖．微分中值定理的研究与推广．沈阳农业大学学报，2003，(4).

[24] 杨辉，姚红．微分中值定理的一种推广．安阳工学院学报，2005，(3).

［25］张二丽，王鹏涛．罗尔定理及其推广．学术论坛，2009，（24）．
［26］白凤阁．罗尔中值定理的推广．内蒙古财经学院学报，2005，（6）．
［27］张玉莲，杨要杰．拉格朗日（Lagrange）中值定理的推广．河南教育学院学报，2008，（2）．
［28］李光绪．Lagrange 微分学中值定理的推广．四川师范学院学报，1989，（10）．
［29］张立新．二元函数的微分中值定理及罗比达法则．辽宁教育学院学报，2001，（9）．
［30］邢棉，孟新焕．二元函数微分中值定理的推广．工科数学，1992，（8）．
［31］陈玉.有限开区间上的柯西中值定理．江西科学，2012，（10）．
［32］龚东山，刘岳巍，牛富俊．柯西中值定理的一个推广．高师理科学刊，2008，（6）．
［33］尹枥．柯西中值定理的推广及其“中间点”的渐近性．滨州学院学报，2005，（6）．
［34］杜家祥．柯西中值定理与拉格朗日中值定理的高阶形式．淮北煤师院学报，2001，（12）．
［35］邓勇．关于柯西微分中值定理的一种推广．楚雄师范学院学报，2009，（3）．
［36］王娟，等．关于广义柯西中值定理的一种推广．内蒙古民族大学学报，2010，（9）．
［37］刘孝书，郭志林．广义 Cauchy 中值定理及其逆定理．数学的实践与认识，2006，（6）．
［38］刘昌茂．广义 Cauchy 中值定理．吉首大学学报：自然科学版，1998，（4）．
［39］王文惠．泰勒中值定理的证明与应用．重庆商学院学报，1997，（3）．
［40］霍玉珍．高数中微分中值定理的应用．河北建筑工程学院学报，2004，（1）．
［41］石富华，李近．拉格朗日中值定理在函数极限运算中的应用．九江学院学报：自然科学版，2011，（1）．
［42］戴红兵．利用拉格朗日中值定理求极限．思茅师范高等专科学校学报，2005，（9）．
［43］明清河．泰劳公式在理论证明中的应用．枣庄师专学报，1992，（2）．
［44］王庆东，侯海军．关于泰勒定理的中心的选择．高等数学研究，2006，（5）．
［45］严永仙．泰勒中值定理在不等式证明中的应用．浙江科枝学院学报，2010，（6）．
［46］周玉华．关于微分中值定理“中值点”的个数问题．天水师范学院学报，2009，（3）．
［47］董中红．关于微分中值定理中值点的个数．荆州师专学报：自然科学版，1990，（1）．
［48］张广梵．关于徽分中值定理的一个注记．数学的实践与认识，1998，（1）．
［49］陈新一，唐文玲．关于 Lagrange 中值定理“中值点”的渐近性．甘肃教育学院学报：自然科学版，1993，（3）．
［50］丁继忠．关于微分中值定理中值点的渐近性．四川教育学院学报，1999，（1）．
［51］徐辉．关于柯西中值定理“中值 ξ ”的渐近性．华东地质学院学报，1994，（9）．
［52］刘龙章，戴立辉，杨志辉．再论微分中值定理“中间点” ξ 的性质．大学数学，2007，（8）．
［53］时统业，谢井，李鼎．论泰勒中值定理“中间点”的性质．大学数学，2012，（8）．

第 3 章　积分中值定理

积分中值定理是数学分析中的基本定理与理论基础之一，是沟通积分与函数的桥梁，它揭示了一种将积分化为函数值，或者是将复杂函数的积分化为简单函数的积分的重要方法，有着广泛的理论价值与应用价值。

3.1　积分中值定理的历史演变

积分中值定理是法国数学家拉格朗日首先发现和提出的，但是由于他对面积、积分等概念的理解不是很清晰，所以没有给出让人满意的证明。

积分中值定理的真正提出和严格证明是由柯西完成的。柯西作为分析学严格化的开创者，在他的分析著作《分析教程》（1821 年）、《无限小计算教程概论》（1823 年）中，以严格化为目标，对微积分的基本概念，如变量、函数、极限、连续性、导数、微分、收敛等给出了明确的定义，并在此基础上重建和拓展了微积分的重要事实与定理。

在上述著作中，柯西给出了连续函数定积分的确切定义，证明了它的存在性，给出了定积分的线性性质、可加性等，他还以严格的形式表述并证明微积分基本定理，中值定理等一系列重要定理。

柯西是在《无限小计算教程概论》第 22 讲中，提出并证明了积分中值定理：

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x = f[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0) = f(\bar{x})(x-x_0)$$

其中 $\theta \in [0,1], \bar{x} \in [x_0, x]$。

柯西应用积分中值定理和定积分对积分区间的可加性，在《无限小计算教程概论》第 26 讲中，将微积分基本定理表述为

“如果 $f(x)$ 是一个连续函数，$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$ 作为 x 的函数，将以积分号下的函数 $f(x)$ 为其导函数”。

证明：

$$F(x+a)-F(x)=\int_{x_0}^{x+a} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x}^{x+a} f(x)\,\mathrm{d}x = af(x+\theta a),\ \theta\in[0,1]$$

等式两边除以 a，令 $a \to 0$ 取极限，得

$$\lim_{a\to 0}\frac{F(x+a)-F(x)}{a}=\lim_{a\to 0} f(x+\theta a)$$

由 $f(x)$ 为连续函数，得到 $F'(x)=f(x)$，其中 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的原函数或反导数，

或记为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=f(x)$$

他还利用积分中值定理得到了牛顿–莱布尼茨公式

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)-F(x_0)$$

3.2 积分中值定理的内容与证明

在常见的《数学分析》教材中，积分中值定理一般是指积分第一中值定理、推广的积分第一中值定理、积分第二中值定理、加强条件的积分第二中值定理。

3.2.1 积分第一中值定理及其证明

定理 3.1（积分第一中值定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$。

证法一（利用闭区间上连续函数的介值定理）

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此存在最大值 M 和最小值 m，即由 $m\leqslant f(x)\leqslant M, x\in[a,b]$，使用积分不等式性质得到

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

或

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}\leqslant M$$

再由连续函数的介值性，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$ 成立。

证法二（利用微积分基本定理和罗尔微分中值定理）

设积分上限函数

$$F(x)=(b-a)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-x\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由微积分基本定理知

$$F'(x)=(b-a)f(x)-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

又 $F(a)=F(b)$，由罗尔微分中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $F'(\xi)=0$，故

$$(b-a)f(\xi)-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

即
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证法三（利用微积分基本定理和拉格朗日微分中值定理）

设积分上限函数
$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以由微积分基本定理知 $F(x)$ 可导且 $F'(x)=f(x)$，再对 $F(x)$ 使用微分中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得
$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$$
即得
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证法四（利用区间套定理）

设
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定可取到最大值 M 和最小值 m，设 $f(x_1)=m, f(x_2)=M$，不妨设 $x_1<x_2$，记 x_1,x_2 组成的区间为 $[a_1,b_1]$，则有
$$f(a_1)(b-a)<A, f(b_1)(b-a)>A$$

将区间 $[a_1,b_1]$ 二等分，若中点 $\dfrac{a_1+b_1}{2}$ 满足 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)(b-a)=A$，则取 $\xi=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，定理得证。

若 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)(b-a)>A$，则令 $[a_2,b_2]=\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$；

若 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)(b-a)<A$，则令 $[a_2,b_2]=\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$。

这样构造的 $[a_2,b_2]$ 有 $f(a_2)(b-a)<A, f(b_2)(b-a)>A$。

以上过程继续下去，将得到如下结果：

（1）第 k 次等分后，有 $f\left(\dfrac{a_k+b_k}{2}\right)(b-a)=A$，则取 $\xi=\dfrac{a_k+b_k}{2}$ 定理得证；

（2）得一区间套 $[a_n,b_n]$ 满足 $f(a_n)(b-a)<A, f(b_n)(b-a)>A$，故由区间套定理知，存在 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(a_n),f(b_n)$ 的极限为 $f(\xi)$，由 $f(a_n)(b-a)<A, f(b_n)(b-a)>A$ 得到 $f(\xi)(b-a)=A$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$。

3.2.2　推广的积分第一中值定理及其证明

定理 3.2（推广的积分第一中值定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x 。$$

证法一（利用闭区间上连续函数的介值定理）

不妨设 $g(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$，这时有 $mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x), x\in[a,b]$, 其中 M、m 分别为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大、最小值。由定积分的不等式性质，得到

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则由上式知 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 从而对任何 $\xi\in[a,b]$都成立。

若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$, 则得 $m\leqslant\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant M$ 。由连续函数的介值性，则至少有一点 $\xi\in[a,b]$， 使得 $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$， 即 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 成立。

证法二（利用微积分基本定理和柯西微分中值定理）

当 $g(x)=0$ 时，定理显然成立。

现设 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$ ，构造两个积分上限函数：

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,\ F(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$

因为 $\Phi(x)$ 、$F(x)$ 满足柯西微分中值定理的条件，且 $F(b)-F(a)=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$ ，所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $\dfrac{\Phi(b)-\Phi(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{\Phi'(\xi)}{F'(\xi)}$ 。

又由微积分基本定理知 $\Phi'(x)=f(x)g(x), F'(x)=g(x)$ ，所以

$$\frac{\Phi(b)-\Phi(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{\Phi'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}=f(\xi)$$

又
$$\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, F(b)-F(a)=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

所以
$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}=f(\xi)$$

故
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

证法三（利用区间套定理）

设 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=A$ ，不妨设 $g(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$。

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定可取到最大值 M 和最小值 m，

设 $f(x_1)=m, f(x_2)=M$ 。

若 $f(x_1)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=A$ 或 $f(x_2)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=A$，则定理得证！

否则 $f(x_1)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x<A$，$f(x_2)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>A$，不妨设 $x_1<x_2$，记 x_1,x_2 组成的区间为 $[a_1,b_1]$ 。

将区间 $[a_1,b_1]$ 二等分：

若中点 $\dfrac{a_1+b_1}{2}$ 满足 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=A$，则定理得证。

若 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>A$，则记 $[a_2,b_2]=\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$。

若 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x<A$，则记 $[a_2,b_2]=\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$。这样构造的 $[a_2,b_2]$ 有 $f(a_2)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x<A$，$f(b_2)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>A$ 。

以上过程继续下去，将得到如下结果：

（1）第 k 次等分后，有 $f\left(\dfrac{a_k+b_k}{2}\right)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=A$，则取 $\xi=\dfrac{a_k+b_k}{2}$ 定理得证；

（2）得一区间套 $[a_n,b_n]$ 满足 $f(a_n)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x<A$，$f(b_n)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>A$，故由区间套定理知，存在 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 。因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(a_n),f(b_n)$ 的极限为 $f(\xi)$，由 $f(a_n)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x<A$，$f(b_n)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>A$ 得到 $f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=A$，即

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

3.2.3　积分第二中值定理及其证明

定理 3.3（积分第二中值定理）

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减且非负，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增且非负，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(b)\int_\eta^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

证明（利用闭区间上连续函数的介值定理）

下面只证（1），类似地可证（2）。

设$G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t, x\in[a,b]$。由于$g(x)$在$[a,b]$上可积，因此$G(x)$在$[a,b]$上连续，从而存在最大值$M$和最小值$m$。

若$f(a)=0$，则由$f(x)$在$[a,b]$上单调递减且非负知$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$，此时对任何$\xi\in\left[a,b\right]$，结论恒成立。

下面设$f(a)>0$，这时结论可写为

$$G(\xi)=\int_a^\xi g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad ①$$

所以问题转化为只需证明

$$m\leqslant\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M, \qquad ②$$

因为由此可借助$G(x)$的介值性立刻证得式①。当然式②又等同于

$$mf(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Mf(a) \qquad ③$$

下面就来证明这个不等式。

由条件$g(x)$有界，设$|g(x)|<L, x\in[a,b]$，而$f(x)$可积，从而对任给的$\varepsilon>0$，必有分割$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_{\mathrm{n}}=b$，使$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i^f\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{L}$。

现把$I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$按积分区间可加性写成

$$I=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_{i-1})]g(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

对于I_1，必有

$$|I_1|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(x_{i-1})||g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant L\cdot\sum_{i=1}^{n}\omega_i^f\Delta x_i<L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon$$

对于I_2，由于$G(x_0)=G(a)=0$和

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{x_0}g(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{x_{i-1}}g(x)\,\mathrm{d}x=G(x_i)-G(x_{i-1})$$

可得

$$\begin{aligned}
I_2&=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})[G(x_i)-G(x_{i-1})]\\
&=f(x_0)\left[G(x_1)-G(x_0)\right]+\cdots+f(x_{n-1})\left[G(x_{n-2})-G(x_{n-1})\right]\\
&=G(x_1)\left[f(x_0)-f(x_1)\right]+\cdots+G(x_{n-1})\left[f(x_{n-2})-f(x_{n-1})\right]+G(x_n)f(x_{n-1})\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}G(x_i)\left[f(x_{i-1})-f(x_i)\right]+G(b)f(x_{n-1})
\end{aligned}$$

再由$f(x)\geqslant 0$且单调递减，使得其中$f(x_{n-1})\geqslant 0, f(x_{i-1})-f(x_i)\geqslant 0,\ \ i=1,2,\cdots,n-1$。于是利用$\mathrm{G}(x_i)\leqslant M, i=1$，2，…，$n$估计得

$$I_2\leqslant M\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1})-f(x_i)]+Mf(x_{n-1})=Mf(a)$$

同理由 $G(x_i)\geqslant m,\ i=1,2,\cdots,n$ 又有 $I_2\geqslant mf(a)$ 。

综合 $I=I_1+I_2$，$|I_1|<\varepsilon$， $mf(a)\leqslant I_2\leqslant Mf(a)$，得到

$$-\varepsilon+mf(a)\leqslant I\leqslant Mf(a)+\varepsilon$$

由 ε 为任意小正数，这便证得 $mf(a)\leqslant I\leqslant Mf(a)$，即不等式（3）成立，随之有（2），（1）和所证结论式成立。

3.2.4　加强条件的积分第二中值定理及其证明

定理 3.4（加强条件的积分第二中值定理）

若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调， $g(x)$ 在$[a,b]$上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

证明（利用积分第二中值定理）

若 $f(x)$ 为单调递减函数，令 $h(x)=f(x)-f(b)$，则 $h(x)$ 为非负递减函数。

由定理 3.3（1），存在 $\xi\in\left[a,b\right]$，使得

$$\int_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x=h(a)\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x=[f(a)-f(b)]\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x$$

由于　$$\int_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-f(b)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

因此证得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x&=f(b)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x+\left[f(a)-f(b)\right]\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x\\&=f(a)\int_a^{\xi}g(x)+f(b)\int_{\xi}^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

若 $f(x)$ 为单调递增函数，只须令 $h(x)=f(x)-f(a)$，同样可证得结论成立。

3.3　积分中值定理的相关内容分析

3.3.1　积分中值定理的几何意义

1．积分第一中值定理

积分第一中值定理　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$ 。

积分中值定理的几何意义为： $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的曲边梯形面积等于以 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 所示的 $f\left(\xi\right)$ 为高，$[a,b]$为底的矩形面积（见图 3.1）。而 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 则可理解为 $f\left(x\right)$ 在区间$[a,b]$上所有函数值的平均值。这是通常有限个数的算术平均值的推广。

2．推广的积分第一中值定理

因为推广的积分第一中值定理和积分第二中值定理的左边都是两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积的定积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，所以，我们首先解释 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 的几何意义。

根据截面已知的几何体的体积公式可知，若在 $[a,b]$ 上，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都连续且非负，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 即为由 xOy 面，xOz 面，平面 $x=a$，平面 $x=b$，柱面 $y=f(x)$ 及柱面 $z=g(x)$ 所围成的几何体的体积 V（见图 3.2）。

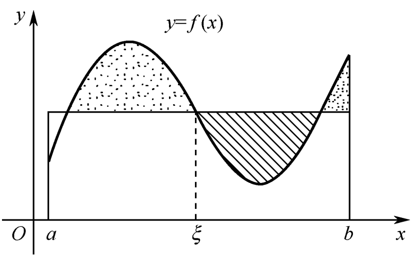


图 3.1

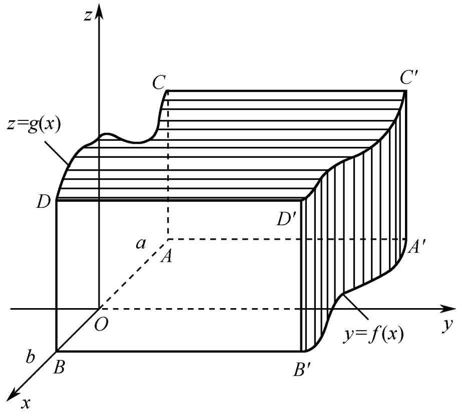


图 3.2

特别地，若 $g(x)=1$，则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 可解释为以由 xOy 面上曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$ 及 $x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形为底，以平面 $z=1$ 为顶，也就是以 1 为高的几何体的体积。

推广的积分第一中值定理：若 $f(x)$、$g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续且非负，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$。

其几何意义为：由 xOy 面，xOz 面，平面 $x=a$，平面 $x=b$，柱面 $y=f(x)$ 及柱面 $z=g(x)$ 所围成的几何体的体积 V 等于一个由 xOy 面，xOz 面，平面 $x=a$，平面 $x=b$，平面 $y=f(\xi)$ 及柱面 $z=g(x)$ 所围成的几何体的体积（见图 3.3）。

3．积分第二中值定理

积分第二中值定理：设函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad ①$$

特别地：

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少且 $f(b)\geqslant 0$，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x \qquad ②$$

（2）若 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调增加且 $f(a)\geqslant 0$，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x \qquad ③$$

对于 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续且非负的情况，积分第二中值定理中的几个等式的几何意义为：由 xOy 面， xOz 面，平面 $x=a$ ，平面 $x=b$ ，柱面 $y=f(x)$ 及柱面 $z=g(x)$ 所围成的几何体的体积 $V=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 分别是：

（1）式①等于由 xOy 面、 xOz 面、平面 $x=a$ 、平面 $x=\xi$ 、平面 $y=f(a)$ 及柱面 $z=g(x)$ 所围成的几何体的体积 $V_1=f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x$ 与由 xOy 面、xOz 面、平面 $x=b$ 、平面 $x=\xi$ 、平面 $y=f(b)$ 及柱面 $z=g(x)$ 所围成的几何体的体积 $V_2=f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ 的和，即 $V=V_1+V_2$，也就是说原来的几何体的体积等于两个底面分别是长为 $\xi-a$ ，宽为 $f(a)$ 的矩形和长为 $b-\xi$ 宽为 $f(b)$ 的矩形，顶面仍相应于原来的柱面顶面 $z=g(x)$ 的两个几何体的体积的和（见图 3.4）。

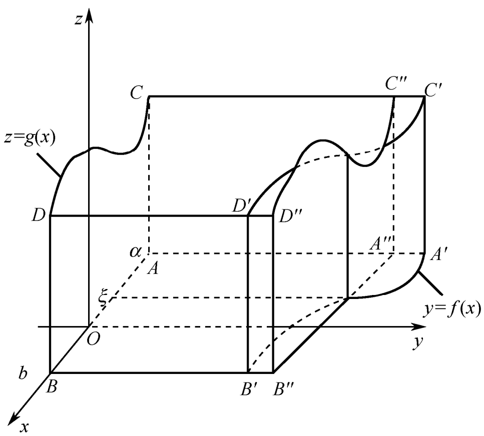


图 3.3

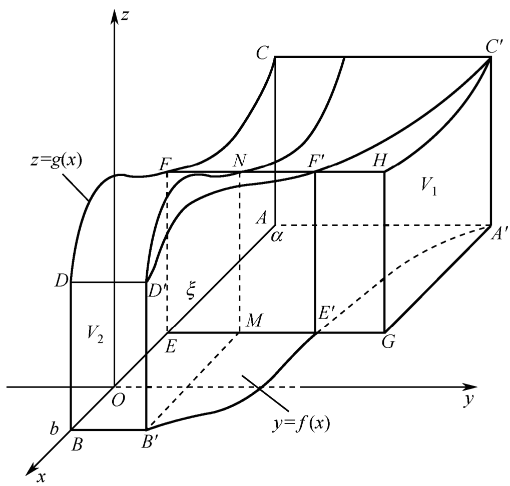


图 3.4

（2）式②等于由 xOy 面、 xOz 面、平面 $x=a$ 、平面 $x=\xi$ 、平面 $y=f(a)$ 及柱面 $z=g(x)$ 所围成的几何体的体积 $V_1=f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x$ 。

（3）式③等于由 xOy 面、 xOz 面、平面 $x=b$ 、平面 $x=\xi$ 、平面 $y=f(b)$ 及柱面 $z=g(x)$ 所围成的几何体的体积 $V_2=f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ 。

3.3.2　积分中值定理的条件与结论

积分第一中值定理中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的条件是必要但不充分的，即若不满足

连续的条件，结论可能成立，也可能不成立。

如 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}$，在 $[-1,1]$ 上不连续，但存在 $\xi_1=-\dfrac{1}{2},\xi_2=\dfrac{1}{2}$ 使得

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_1)[1-(-1)]=f(\xi_2)[1-(-1)]$$

再如，$f(x)=\begin{cases}2x,0\leqslant x\leqslant 1\\ 5,1<x\leqslant 2\end{cases}$ 在 $[0,2]$ 上不连续，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6$，也不存在 $\xi\in[0,2]$ 使得 $f(\xi)(2-0)=2f(\xi)=6$。

可以把积分第一中值定理中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的条件减弱为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，结论仍成立（证明见后面推广部分）。

对推广的积分第一中值定理、积分第二中值定理、加强条件的积分第二中值定理的条件和结论的分析，有兴趣的读者可参考其他文献，这里不再详细讨论。

3.3.3 微分中值定理与积分中值定理之间的关系

微分中值定理与积分中值定理分别是微分学与积分学中的两个基本定理，是微积分的核心内容，也是数学分析的重要理论基础，由于微分与积分是可逆运算，所以微分中值定理与积分中值定理也应该是相互联系、可以互相推出的。

首先写出微分中值定理与积分中值定理，然后通过变更条件，使它们相互等价，能够互相推出；最后给出微分、积分中值定理的统一形式及其证明。

（1）拉格朗日微分中值定理

若函数 $F(x)$ 满足：

① 在 $[a,b]$ 上连续；

② 在 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

（2）积分第一中值定理

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

（3）柯西微分中值定理

若函数 $F(x)$、$G(x)$ 满足：

① 在 $[a,b]$ 上连续；

② 在 (a,b) 内可导；

③ 对任意的 $x\in(a,b),G'(x)\neq 0$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$$

（4）推广的积分第一中值定理

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

1．微分中值定理与积分中值定理的等价性

（1）拉格朗日微分中值定理与积分第一中值定理的等价性

首先证明由积分第一中值定理可推出拉格朗日微分中值定理。考察积分第一中值定理与拉格朗日微分中值定理的题设条件，在积分第一中值定理里，因为 $f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)$ 一定存在原函数，不妨设为 $F(x)$，且 $F'(x)=f(x)$，则 $F(x)$ 满足：（1）在 $[a,b]$ 上连续，（2）在 (a,b) 内可导，即满足拉格朗日微分中值定理的题设条件，也就是积分第一中值定理的题设条件比拉格朗日微分中值定理的题设条件强。

由积分第一中值定理可知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

上式左边由牛顿−莱布尼茨公式得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$

上式右边
$$f(\xi)(b-a) = F'(\xi)(b-a)$$
故得
$$F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a)$$
即
$$F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

然后证明由拉格朗日微分中值定理可推出积分第一中值定理。若加强拉格朗日微分中值定理的题设条件，将其题设条件（2）改为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $F(x)$ 的导数 $f(x)$ 连续，显然拉格朗日微分中值定理的题设条件与积分第一中值定理的题设条件等价。

由拉格朗日微分中值定理可知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

又根据加强的条件：$F(x)$ 的导数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，上式左边 $F'(\xi)=f(\xi)$，上式右边由牛顿-莱布尼茨公式得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

故得
$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$
即
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

注 上述的推导说明，积分第一中值定理的题设条件比拉格朗日微分中值定理

的题设条件强，若加强拉格朗日中值定理的条件，则拉格朗日中值定理与积分第一中值定理可认为是等价的，只是结论表达式分别是微分形式与积分形式。

（2）柯西微分中值定理与推广的积分第一中值定理的等价性

现在加强推广的积分第一中值定理的题设条件，表述为如下定理。

定理（加强条件的推广的积分第一中值定理）

若设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上无零点，则在 (a,b) 内存在 ξ_1,ξ_2，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi_1)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(\xi_2)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明 因为 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且无零点，所以由介值定理知 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号（否则必有零点）。

由推广的积分第一中值定理可知，在 (a,b) 在内存在 ξ_1,ξ_2，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi_1)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(\xi_2)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

下面首先证明由上述定理（加强条件的推广的积分第一中值定理）可推出柯西微分中值定理。

因为 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x),g(x)$ 一定有连续的原函数，不妨设

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + c_1, G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t + c_2$$

且 $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$， $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上无零点， c_1,c_2 为常数。

故上述定理的题设条件中 $F(x),G(x)$ 一定满足柯西微分中值定理的条件。

由上述定理可知，在 (a,b) 上存在 ξ_1,ξ_2，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi_1)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(\xi_2)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

故

$$f(\xi_1)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = g(\xi_2)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{f(\xi_1)}{g(\xi_2)} \qquad ①$$

亦即

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_2)} \qquad ②$$

设 $H(x) = f(\xi_1)G(x) - g(\xi_2)F(x)$，则 $H(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数 $h(x)$，即

$$H'(x) = h(x) = f(\xi_1)G'(x) - g(\xi_2)F'(x) = f(\xi_1)g(x) - g(\xi_2)f(x)$$

将 a,b 代入 $H(x)$ 得

$$\begin{aligned}H(a)&=f(\xi_1)G(a)-g(\xi_2)F(a)\\&=f(\xi_1)\left[\int_a^a g(x)\mathrm{d}x+C_2\right]-g(\xi_2)\left[\int_a^a f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\\&=f(\xi_1)C_2-g(\xi_2)C_1\\H(b)&=f(\xi_1)G(b)-g(\xi_2)F(b)\\&=f(\xi_1)\left[\int_a^b g(x)\mathrm{d}x+C_2\right]-g(\xi_2)\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\\&=f(\xi_1)C_2-g(\xi_2)C_1\end{aligned}$$

可知 $H(a)=H(b)$，由牛顿−莱布尼茨公式和积分第一中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 η，使得

$$0=H(b)-H(a)=\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=h(\eta)(b-a)=H'(\eta)(b-a)$$

即
$$H'(\eta)=0$$

故
$$f(\xi_1)G'(\eta)-g(\xi_2)F'(\eta)=0$$

亦即
$$\frac{f(\xi_1)}{g(\xi_2)}=\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)} \tag{③}$$

由式①～式③可得，在 (a,b) 内至少存在一点 η，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)} \tag{④}$$

式④为柯西微分中值定理的结论。

然后证明由加强条件的柯西微分中值定理可推出上述定理（加强条件的推广的积分第一中值定理）。

将柯西微分中值定理的条件加强为：$F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，设

$$F'(x)=f(x),G'(x)=g(x),R(x)=\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

由柯西微分中值定理，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ_1 使

$$\frac{R'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{R(b)-R(a)}{G(b)-G(a)} \tag{⑤}$$

而
$$\frac{R'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{f(\xi_1)g(\xi_1)}{g(\xi_1)}=f(\xi_1)$$

$$\frac{R(b)-R(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

即
$$f(\xi_1)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

整理得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi_1)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad ⑥$$

同理可证，在(a,b)内至少存在一点ξ_2使
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(\xi_2)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad ⑦$$

式⑥、式⑦为上述定理（加强条件的推广的积分第一中值定理）的结论。

注 1 上述的推导说明，在加强柯西微分中值定理的条件后，上述定理与柯西微分中值定理可视为等价定理，只是结论表达式分别是微分形式与积分形式。

注 2 我们还可以通过具体题目说明微分中值定理与积分中值定理在解题中的等价性。

（1）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$[a,b]$内有一阶连续导数$(b>a>0)$，证明：必有$\xi\in(a,b)$，使
$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

证明 （1）首先用“微分中值定理”证明

令
$$g(x)=xf(x),h(x)=x \qquad ①$$

由“柯西中值定理”：$g(x),h(x)$都在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且对于任意$x\in(a,b)$，$h'(x)=1\neq 0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得
$$\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}=\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}$$

即
$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi) \qquad ②$$

（2）其次利用“积分中值定理”证明

由式①$g(x)=xf(x)$得$g'(x)=f(x)+xf'(x)$，根据题设条件知$g'(x)$在$[a,b]$上连续，故$g'(x)$在$[a,b]$上可积，有
$$\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[f(x)+xf'(x)\right]\mathrm{d}x \qquad ③$$

由“积分中值定理”可得
$$\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x=\left[f(\xi)+\xi f'(\xi)\right](b-a) \qquad ④$$

又
$$\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x=g(b)-g(a)=bf(b)-af(a) \qquad ⑤$$

所以由式④、式⑤可知：
$$bf(b)-af(a)=\left[f(\xi)+\xi f'(\xi)\right](b-a)$$

即
$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} \qquad ⑥$$

（3）设$F(x)$在$[a,b](0<a<b)$上连续，在$[a,b]$内有一阶连续导数，且$F'(x)$无零点，证明：在(a,b)内存在ξ_1、ξ_2使

$$F'(\xi_1)=\frac{F'(\xi_2)}{2\xi_2}(a+b)$$

证明　①首先用微分中值定理来证明。

由拉格朗日中值定理，在(a,b)内至少存在一点$\xi_1\in(a,b)$使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi_1) \quad ①$$

另外，设$G(x)=x^2$且$a>0$，$F(x)$、$G(x)$在$[a,b]$内满足柯西中值定理，在(a,b)内至少存在一点$\xi_2\in(a,b)$使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b^2-a^2}=\frac{F'(\xi_2)}{2\xi_2} \quad ②$$

即
$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{F'(\xi_2)}{2\xi_2}(a+b)$$

比较得
$$F'(\xi_1)=\frac{F'(\xi_2)}{2\xi_2}(b+a)$$

② 再用积分第一中值定理来证

设$f(x)=F'(x)$，在(a,b)中至少存在ξ_1使

$$f(\xi_1)=\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \quad ③$$

另外，设$u(x)=\dfrac{f(x)}{2x}$，$v(x)=2x$。显然$u(x)$、$v(x)$满足定理条件，则由定理知至少存在一点$\xi_2\in(a,b)$使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{f(x)}{2x}\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{f(\xi_2)}{2\xi_2}\int_a^b 2x\,\mathrm{d}x=\frac{f(\xi_2)}{2\xi_2}(b^2-a^2)$$

即
$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=\frac{f(\xi_2)}{2\xi_2}(b+a) \quad ④$$

由式③式④比较得
$$F'(\xi_1)=\frac{f(\xi_2)}{2\xi_2}(b+a)$$

比较式①与式③，可以看出式①即是式③，同样式②就是式④。只是式①与式②是微分形式，由微分中值定理推出；式③与式④是积分形式，由积分第一中值定理推出，但在本质上是等价的。

2．微分中值定理与积分中值定理的统一形式

首先用柯西微分中值定理将拉格朗日微分中值定理、罗尔微分中值定理、推广的积分第一中值定理、积分第一中值定理统一起来。

柯西微分中值定理　若函数$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f'(x)$与$g'(x)$在(a,b)内不同时为零且$g(a)\neq g(b)$，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

（1）若令柯西微分中值定理中的 $g(x)=x$，则定理变为：

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即得拉格朗日微分中值定理。

（2）若令柯西微分中值定理中的 $g(x)=x$ 且 $f(b)=f(a)$，则定理变为：

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(b)=f(a)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$，即得罗尔微分中值定理。

（3）若设柯西微分中值定理中的 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，用 $\int_a^x g(u)\mathrm{d}u$ 代替 $f(x)$，用 u 代替 $g(x)$，则且 $f(a)=g(a)=0$，$f'(\xi)=g(\xi)$，$g'(\xi)=f(\xi)g(\xi)$，即得推广的积分第一中值定理 $\int_a^b f(u)g(u)\mathrm{d}u=f(\xi)\int_a^b g(u)\mathrm{d}u$。

（4）若在推广的积分第一中值定理中，再取 $g(x)=1$，即得积分第一中值定理，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(b-a)$。

3．微分中值定理与积分中值定理的统一证明

罗尔微分中值定理是证明微分学、积分学其他几个中值定理的基础。下面以罗尔微分中值定理为基础，通过构造不同形式的辅助函数，对微分、积分中值定理做出多种统一的证明。

（I）借助面积函数统一证明

设 $f(t)$、$g(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则由参数方程 $x=g(t),y=f(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 表示的曲线上三点 $A(g(a),f(a)),B(g,(b),f(b)),C(g(t),f(t))$ 组成的三角形面积为

$$s(t)=\begin{vmatrix} g(a) & f(a) & 1\\ g(b) & f(b) & 1\\ g(t) & f(t) & 1\end{vmatrix}$$

易知，面积函数 $s(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $s(a)=s(b)$，满足罗尔中值定理诸条件。故存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$s'(\xi)=0$$

即

$$s'(\xi)=\begin{vmatrix} g(a) & f(a) & 1\\ g(b) & f(b) & 1\\ g'(\xi) & f'(\xi) & 0\end{vmatrix}=0 \qquad ①$$

（1）设 $f'(t)$、$g'(t)$ 在 (a,b) 内不同时为零，且 $g(a)\neq g(b)$。由于 $f'(\xi)$、$g'(\xi)$ 在 (a,b) 内不同时为零，必有 $g'(\xi)\neq 0$；否则，若 $g'(\xi)=0$，由式①得 $f'(\xi)=0$，这是不可能的，展开式①，即得柯西中值定理：

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

（2）在参数方程中令 $g(t)=t$，则式①中 $g(a)=a,\ g(b)=b,\ g'(t)=1$，展开即得拉格朗日中值定理：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

（3）设 $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上不变号。不妨设 $g(t)\geqslant 0$。在参数方程中以 $\int_a^t g(u)\,\mathrm{d}u$ 代替 $f(t)$，以 $\int_a^t f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ 代替 $g(t)$，则由式①即得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \int_a^b f(u)g(u)\mathrm{d}u & \int_a^b g(u)\mathrm{d}u & 1 \\ f(\xi)g(\xi) & g(\xi) & 0 \end{vmatrix}=0$$

若 $g(t)>0$，则 $g(t)\neq 0$，展开上式即得推广的积分中值定理：

$$\int_a^b f(u)g(u)\mathrm{d}u=f(\xi)\int_a^b g(u)\mathrm{d}u$$

若 $g(t)=0$，对 $[a,b]$ 上任意一点 ξ 都成立。

④在③中令 $g(t)=1$，即得积分中值定理：

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=f(\xi)(b-a)$$

（II）构造辅助函数统一证明

证法一　设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，构造辅助函数

$$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)-f(x)$$

则函数 $F(x)$ 显然在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)$，满足罗尔定理诸条件，故在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)-f'(\xi)=0 \qquad ②$$

（1）设 $f'(x),g'(x)$ 在 (a,b) 内不同时为零，且 $g(a)\neq g(b)$。

由于 $f'(\xi)$、$g'(\xi)$ 在 (a,b) 内不同时为零，必有 $g'(\xi)\neq 0$；否则若 $g'(\xi)=0$，由式②得 $f'(\xi)=0$，这是不可能的。改写式②，即得柯西中值定理。

（2）令 $g(x)=x$，代入并改写式②，即得到拉格朗日中值定理。

（3）设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，以 $\int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u$ 代替 $f(x)$，以 $\int_a^x f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ 代替 $g(x)$，由式②即证得推广的积分中值定理。

（4）在（3）中再令 $g(x)=1$，即得积分中值定理

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u=f(\xi)(b-a)$$

证法二 设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。构造辅助函数

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$$

由题设，有 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)$，满足罗尔定理诸条件。故在 (a,b) 内到至少存在一点 ξ 使得

$$\varphi(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(\xi) & g(\xi) & h(\xi) \end{vmatrix}=0 \qquad ③$$

（1）设 $f'(x),g'(x)$ 在 (a,b) 内不同时为零，且 $g(a)\neq g(b)$。在 $\varphi(x)$ 中，令 $h(x)=1$，则由式③有

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f'(\xi) & g'(\xi) & 0 \end{vmatrix}=0$$

由于 $g'(\xi)\neq 0$（否则由式③得 $f'(\xi)=0$，与题设矛盾），展开上式即得柯西中值定理

$$\begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f'(\xi) & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

（2）在 $\varphi(x)$ 中，令 $h(x)=1,\ g(x)=x$，则由式③展开即可得到拉格朗日中值定理。

（3）在 $\varphi(x)$ 中，令 $h(x)=1$，并以 $\int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u$ 代替 $f(x)$，以 $\int_a^x f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ 代替 $g(x)$，即可由式③证得推广的积分中值定理。

（4）在（3）中再令 $g(x)=1$，即得积分中值定理：

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u=f(\xi)(b-a)$$

3.3.4 积分中值定理的中值点

积分中值定理的“中值点”的个数问题、渐近性质、分析性质等的讨论，可仿照微分中值定理的方式，这里不再详细说明，可参考相关文献。

3.4 积分中值定理的应用

3.4.1 估计某些定积分的值

在某些积分式中，当被积函数“积不出”或者原函数很复杂时， 可用积分中值定理的方法来估计积分。

例 3.1　估计下列积分的值：

（1）$\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$；

（2）$\int_a^b \sin x^2 dx\ (0<a<b)$。

解　（1）**解法一**

设
$$f(x)=e^{-x}，\quad g(x)=\frac{1}{x+100}$$

显然 $f(x)$ 在 $[0,100]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[0,100]$ 上可积且不变号，由推广的积分第一中值定理知：

$$\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx=e^{-\xi}\int_0^{100}\frac{1}{x+100}dx=e^{-\xi}\cdot\ln 2$$

其中 $\xi\in[0,100]$。

所以 $e^{-100}\cdot\ln 2\leqslant\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx\leqslant e^0\cdot\ln 2=\ln 2$。

解法二　设
$$f(x)=\frac{1}{x+100},g(x)=e^{-x}$$

显然 $f(x)$ 在 $[0,100]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[0,100]$ 上可积且不变号，由推广的积分第一中值定理知：

$$\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx=\frac{1}{\xi+100}\int_0^{100}e^{-x}dx=\frac{1-e^{-100}}{\xi+100}$$

其中 $\xi\in[0,100]$。

所以 $\frac{1-e^{-100}}{200}\leqslant\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx\leqslant\frac{1-e^{-100}}{100}$。

（2）这里的被积函数的原函数不能用初等函数来表示

由 $\int_a^b\sin x^2dx=\int_a^b\frac{1}{x}\cdot x\sin x^2dx$ 知，可设 $f(x)=\frac{1}{x},g(x)=x\sin x^2$。

显然函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调递减且非负，$g(x)$ 在$[a,b]$上可积，由推广的积分第二中值定理知

$$\int_a^b\sin x^2dx=\int_a^b\frac{1}{x}\cdot x\sin x^2dx=\frac{1}{a}\int_a^{\xi}x\sin x^2dx=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi^2)$$

其中 $\xi\in[a,b]$。

故$\left|\int_a^b\sin x^2dx\right|\leqslant\frac{1}{a}$。

例 3.2　证明：$\frac{1}{20\cdot\sqrt[3]{2}}\leqslant\int_0^1\frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}dx\leqslant\frac{1}{20}$。

证明　设
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^6}},g(x)=x^{19}$$

显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积且不变号，由推广的积分第一中值定理知：

$$\int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\xi^6}}\int_0^1 x^{19}\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+\xi^6}}$$

其中 $\xi\in[0,1]$。

所以 $\dfrac{1}{20\cdot\sqrt[3]{2}} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{20}$。

3.4.2 求含有积分的极限

在极限的计算中，如果含有定积分式，常常可以运用积分中值定理，把积分式简化，然后运用求极限的各种方法，解决问题。

例 3.3 证明下列各式：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = 0,\ 0<a<\frac{\pi}{2}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 0$，$p$ 为实数；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = 0$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = 0$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos^n x\mathrm{d}x = 0$。

证明 （1）由积分第一中值定理得

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \cos^n\xi\left(\frac{\pi}{2}-a\right),\quad a\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{2}$$

因 $0\leqslant\cos\xi\leqslant\cos a<1$，所以

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\cos^n\xi\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=0$$

由迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = 0$。

（2）**证法一**

此数列通项中含有变限定积分，被积函数的原函数不能用初等函数来表示，可以用积分第一中值定理来求极限。

设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$f(x)$ 在 $[n,n+p]$ 上连续，由积分第一中值定理得

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p$$

因ξ_n介于n与$n+p$之间，当$n\to\infty$时$\xi_n\to\infty$，由无穷小与有界量的乘积为 0 知：

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p=0$$

证法二　设$f(x)=\sin x,g(x)=\dfrac{1}{x}$。显然$f(x),g(x)$在$[n,n+p]$上满足推广的积分第一中值定理，故

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sin\xi_n\cdot\int_n^{n+p}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sin\xi_n\cdot\ln\frac{n+p}{n}$$

当$n\to\infty$时$\ln\dfrac{n+p}{n}\to 0$；而$|\sin\xi_n|\leqslant 1$；故

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\xi_n\cdot\ln\frac{n+p}{n}\right)=0$$

证法三　设$f(x)=\dfrac{1}{x},g(x)=\sin x$。显然$f(x)$在$[a,b]$上单调递减且非负，$g(x)$在$[a,b]$上可积，由推广的积分第二中值定理知：

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\cdot\int_n^{\xi_n}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\cos n-\cos\xi_n}{n}$$

故$\left|\displaystyle\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{2}{n}$。

所以$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$。

（3）**证法一**

此数列通项中含有定积分，而定积分不易求出，可用推广的积分第一中值定理把积分式简化后再求极限。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n}\cdot\frac{1}{n+1}=0$$

其中$\xi\in[0,1]$。

证法二

$\forall 0<\varepsilon<1$，有
$$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

对第一个积分，应用积分第一中值定理得

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\xi^n}{1+\xi}(1-\varepsilon),\ 0\leqslant\xi<1$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{1+\xi}(1-\varepsilon)=0$$

对第二个积分，由$0\leqslant\dfrac{x^n}{1+x}\leqslant 1$知

$$0 \leqslant \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x \leqslant 0 \leqslant \int_{1-\varepsilon}^{1} 1\,\mathrm{d}x \leqslant 1-(1-\varepsilon)=\varepsilon$$

由 ε 的任意性得
$$\lim_{n\to\infty} \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x = 0$$

综合得
$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x = 0$$

（4）$\forall \varepsilon > 0\ (0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2})$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$$

对第一个积分，应用积分第一中值定理得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x \mathrm{d}x = \sin \xi_n^n \cdot \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right),\ 0 \leqslant \xi < \frac{\pi}{2}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sin \xi_n^n \cdot \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) = 0$$

对第二个积分，由 $0 \leqslant \sin^n x \leqslant 1$ 知

$$0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$$

由 ε 的任意性得
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = 0$$

综合得
$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x = 0$$

（5）类似（4）的方法，只需将区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 分成 $[0,\varepsilon]$ 和 $\left[\varepsilon,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 两段来处理即可证出。

例 3.4 求解下列各题：

（1）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0) \neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (x-t) f(t) \mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$；

（2）设 $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{当}|x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{当}|x| > 1 \end{cases}$，试计算 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_0^b f(x) \dfrac{\sin \lambda x}{x} \mathrm{d}x \quad (b>0)$；

（3）若 f 在 $[0,1]$ 上连续，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) \mathrm{d}x$。

解 （1）令 $x-t=u$ 则

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = \int_x^0 f(u)\mathrm{d}(-u) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}$$

因为不能判断 $f(0)$ 是否存在，所以不能用罗比塔法则，可用积分中值定理，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)x}{f(\xi)x+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$$

此处 ξ 介于 0 与 x 之间，由 $f(x)$ 连续有 $\lim\limits_{x\to 0}f(\xi)=f(0)$。

（2）取 $b^*=\min\left|b,1\right|$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,b^*\right]$ 上递减，由积分第二中值定理有

$$\int_0^b f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=f(0)\int_0^{b^*} f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=f(0)\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\lambda\xi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\quad(0<\xi<b^*)$$

因此
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda\xi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

（3）因
$$\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n}}^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x$$

当 $n\geqslant 2$ 时，根据积分第一中值定理，存在 $\xi_n\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$， $\eta_n\in\left[\dfrac{1}{n},1\right]$ 使得

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x=f\left(\sqrt[n]{\xi_n}\right)\cdot\frac{1}{n},\quad\int_{\frac{1}{n}}^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x=f\left(\sqrt[n]{\eta_n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

因 f 在 $[0,1]$ 上有界，而有界量与无穷小的乘积仍为无穷小，所以

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\sqrt[n]{\xi_n}\right)\cdot\frac{1}{n}=0$$

又因 $\dfrac{1}{n}\leqslant\eta_n\leqslant 1$，故有 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\leqslant\sqrt[n]{\eta_n}\leqslant 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\eta_n}=1$，根据 f 在 $x=1$ 点连续，有

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\sqrt[n]{\eta_n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=f(1)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x=f(1)$。

例 3.5　证明下列各题：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x\sqrt{t}\sin t\mathrm{d}t=0$；

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\cdot\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$；

（3）设 f 在 $\left[0,+\infty\right]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,证明 $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=A$；

（4）设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调函数，证明 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\mathrm{d}x=0$ 。

证明 （1）由第二积分中值定理得

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{t}\sin t\mathrm{d}t\right|=\frac{\sqrt{x}}{x}\left|\int_\xi^x \sin t\mathrm{d}t\right|=\frac{|\cos\xi-\cos x|}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}}\to 0$$

（2）由积分中值定理得

$$0\leqslant\left|\sqrt[3]{x}\cdot\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|=\sqrt[3]{x}\cdot\frac{\sin\xi}{\sqrt{\xi+\cos\xi}}\leqslant\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}$$

再由迫敛性定理得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\cdot\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0$ 。

（3）因 f 在 $\left[0,+\infty\right]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，所以 f 在 $\left[0,+\infty\right]$ 上有界，即 $\exists M>0$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 。

故将积分分段，利用积分中值定理得

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{T}\left(\int_0^{\sqrt{T}} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{T}}^T f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right|\leqslant\frac{1}{T}\int_0^{\sqrt{T}} M\mathrm{d}x+\frac{1}{T}f(\xi)(T-\sqrt{T})$$

因此

$$0\leqslant\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\sqrt{T}}{T}M+\frac{T-\sqrt{T}}{T}f(\xi)$$

由迫敛性定理知

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=A$$

（4）由第二积分中值定理得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\mathrm{d}x&=f(0)\int_0^\xi \sin px\mathrm{d}x+f(2\pi)\int_\xi^{2\pi}\sin px\mathrm{d}x\\&=f(0)\frac{1-\cos p\xi}{p}+f(2\pi)\frac{1-\cos p\xi}{p}\end{aligned}$$

因此

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{4\,[|f(0)|+|f(2\pi)|]}{p}$$

故得证。

3.4.3 证明含有积分的不等式

在证明积分不等式时， 常常考虑运用积分中值定理， 以便去掉积分符号， 如果被积函数是两个函数之积时， 可考虑用积分第一或者第二中值定理。

例 3.6 证明下列各题：

（1）假设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续、非负、严格单调减函数，证明

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x>\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，单调增加，证明

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 （1）由积分第一中值定理可以得到

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = af(\xi_1) > af(a),\ 0<\xi_1<a$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi_2) \geqslant (b-a)f(a),\ 0<\xi_1<a$$

由以上两个不等式可以得到

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x > f(a) > \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\frac{b}{a}-1\right)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)$$

两边乘$\dfrac{b}{a}$得
$$\left(1-\frac{a}{b}\right)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

因为$0<\dfrac{a}{b}<1$所以$1-\dfrac{a}{b}<1$，又由于$f(x)$为$[0,1]$上的连续、非负函数，所以$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x>0$，所以

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

（2）利用定积分的线性性质，关于区间的可加性、积分中值定理及函数的单调性证明。因为

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-f(\xi_1)\frac{(b-a)^2}{2}+f(\xi_2)\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{(b-a)^2}{2}\left[f(\xi_2)-f(\xi_1)\right]\geqslant 0$$

（$a\leqslant\xi_1\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\xi_2\leqslant b$　$f(x)$单调增加）

所以$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。

例 3.7　证明下列各题：

（1）①若$f(x)$为$[0,2\pi]$上的单调递减函数，证明对任意自然数n恒有$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \geqslant 0$，

②若$f(x)$为$[0,2\pi]$上的凸函数且$f'(x)$有界，证明对任意自然数n恒有$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \geqslant 0$；

（2）当$x>0$时有不等式$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2\mathrm{d}t\right|\leqslant\dfrac{1}{x}\ (c>0)$；

（3）若设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续导数，$a>0$，证明

$$|f(0)|\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^a|f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

证明 （1）①设 $g(x)=f(x)-f(2\pi)$，则 $g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上非负、递减，由第二积分中值定理得

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}g(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}f(2\pi)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2\pi}g(x)\sin nx\mathrm{d}x=g(0)\int_0^{\xi}\sin nx\mathrm{d}x=g(0)\frac{1-\cos n\xi}{n}\geqslant 0$$

②利用分部积分法得

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}[-f'(x)]\sin nx\mathrm{d}x$$

而 $-f'(x)$ 满足①，故得证。

（2）令 $u=t^2$，则由第二积分中值定理得

$$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{x^2}^{(x+c)^2}\sin u\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u\right|=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\left|\int_{x^2}^{\xi}\sin u\mathrm{d}u\right|\leqslant\frac{1}{x}$$

（3）由第二积分中值定理得

$$\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}|f(\xi)|\,a=|f(\xi)|,\ \xi\in(0,a)$$

又 $$\int_0^a|f'(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\xi}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)-f(0)|\geqslant|f(0)|-|f(\xi)|$$

故得证。

3.4.4 证明含有中值点的积分问题

例 3.8 证明下列各题：

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-c)f(a)$，其中 $c\in[a,b]$。证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$；

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0,\ \int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$。试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$；

（3）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=0$，则在 (a,b) 内至少存在两点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$；

（4）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且

$$f(a)=f(b)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

试证：存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$。

证明 （1）由积分第一中值定理知，在 $[c,b]$ 上存在一点 k，使

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-c)f(k)$$

而
$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-c)f(a)$$

所以 $f(a)=f(k)$，由罗尔中值定理，在 $(a,k)\subset(a,b)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$。

（2）若 $f(x)\equiv 0, x\in[0,\pi]$ 结论显然成立。假使 $f(x)\not\equiv 0$ 由积分中值定理，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi_1)(\pi-0)=0$$

即 $f(\xi_1)=0$。

若在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)=0$ 只有一个实根 ξ_1，由 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 可知，$f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内异号，不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x)>0$，在 (ξ_1,π) 内 $f(x)<0$，而 $\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 为单调下降，所以

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x-\int_0^\pi f(x)\cos\xi_1\mathrm{d}x&=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\,\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\,\mathrm{d}x>0\end{aligned}$$

与 $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0,\ \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾，于是除 ξ_1 外，在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)=0$ 至少还有一个实根 ξ_2，故至少存在两个相异的实根 $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

（3）证明方法与（2）相同，证明从略。

（4）若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$，则结论显然成立。假设 $[a,b]$ 上 $f(x)\not\equiv 0$，由积分第一中值定理，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 c（实际上在开区间 (a,b) 内一定存在这样的 c）使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(c)(b-a)$，所以

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(a)=f(b)=f(c)$$

又因 $f(x)$ 在 $[a,c],[c,b]$ 上连续，在 $(a,c),(c,b)$ 内可导，由罗尔中值定理知，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$ 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上，使用罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$。

例 3.9　证明下列各题：

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在$(0,1)$内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)$，证明 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$；

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$，则在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$；

（3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{x-1}f(x)\,\mathrm{d}x$，则在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$。

证明 （1）由积分中值定理得

$$f(0)=3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=3\left(1-\frac{2}{3}\right)f(\eta)=f(\eta)\quad\left(\frac{2}{3}\leqslant\eta\leqslant1\right)$$

又因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，故 $f(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，即存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$。

（2）做辅助函数 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又

$$f(1)=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\xi_1 f(\xi_1)=F(\xi_1)$$

而 $F(1)=1\cdot f(1)=f(1)$，故 $F(\xi_1)=F(1)$，故由罗尔定理可得证。

（3）做辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又

$$F(1)=\mathrm{e}f(1)=\mathrm{e}\cdot3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{x-1}f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{\xi_1-1}f(\xi_1)=F(\xi_1)$$

故由罗尔定理可得证。

3.4.5 讨论含积分函数的收敛性与单调性

例 3.10 证明下列各题：

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为连续的，$\forall C>0$，有 $\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛。证明 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛并求其值 $(a>0,b>0)$；

（2）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$F(x)=\int_a^x(x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$，试证：在 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内，若 $f(x)$ 为非减函数，则 $F(x)$ 为非增函数。

（3）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续增加，$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x\in(a,b]\\ f(a), & x=a\end{cases}$，则 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上增函数。

证明 （1）因 $\forall c>0$，$\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\forall\delta>0$ 有

$$I_\delta=\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_\delta^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{a\delta}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{b\delta}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

由积分中值定理，存在 $\xi\delta$ 介于 $a\delta$ 与 $b\delta$ 之间。使

$$I_\delta=f(\xi_\delta)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(\xi_\delta)\ln\frac{b}{a}$$

又因 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，从而有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0}I=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

（2）$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)$$

利用积分中值定理，得

$$F'(x)=xf(\xi)-xf(x)=x\left[f(\xi)-f(x)\right]\quad(0\leqslant\xi\leqslant x)$$

若 $f(x)$ 为非减函数，则 $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，所以 $F'(x)\leqslant 0$，故 $F'(x)$ 为非减函数。

（3）
$$F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x-a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\quad(a<x<b)$$

由积分中值定理知，存在 $\xi\in(a,x)$，使

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)(x-a)$$

所以
$$F'(x)=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{f(\xi)}{x-a}=\frac{1}{x-a}\left[f(x)-f(\xi)\right]$$

由于 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数，故 $f(x)-f(\xi)\geqslant 0$，从而当 $x\in(x,b)$ 时，有

$$F'(x)=\frac{1}{x-a}\left[f(x)-f(\xi)\right]\geqslant 0$$

由此，$F(x)$ 为 (a,b) 内的递增函数。

3.5　积分中值定理的改进与推广

3.5.1　积分中值定理的改进

微分中值定理和积分中值定理作为数学分析的重要定理，它们之间应有着某种天然的内在联系。但在一般的数学分析教材的叙述和证明中，我们不仅看不到这两个定理之间的联系，还会产生一些困惑：积分中值定理的证明不依赖微分中值定理而依赖于介值定理，积分中值定理的中间值 ξ 属于闭区间 $[a,b]$，而不是像微分中值定理和介值定理那样，中间值属于开区间 (a,b)。

下面对积分中值定理进行改进，证明定理中的 $\xi\in(a,b)$，也揭示了积分中值定理与微分中值定理之间的内在联系。

首先从积分第一中值定理的几何意义来看，当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且非负时，公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$ 有着明显的几何特征，它表示由 $y=f(x),x=a,x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形 $AabB$ 的面积 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于与该曲边梯形同底，以 $f(\xi)$ 为高的

矩形 $AabD$ 的面积（见图 3.5）。

通过对几何图形的进一步分析，可以发现定理中的 $\xi\in[a,b]$ 可以改进为 $\xi\in(a,b)$。因为若 ξ 仅取在 $[a,b]$ 的端点上，不妨设 $\xi=a$，则从图 3.6 中可以看出，曲边梯形 $AabB$ 的面积 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与矩形 $AabD$ 的面积不可能相等。

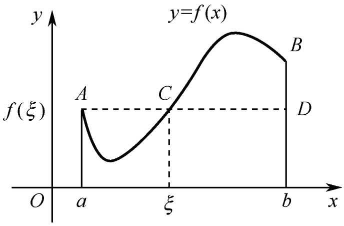


图 3.5

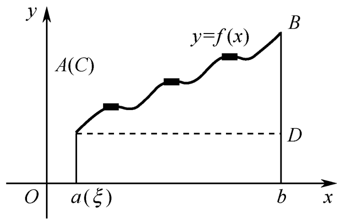


图 3.6

1．积分第一中值定理的改进

改进 3.1（积分第一中值定理的改进）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

证明　证法一

令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$，则由微积分基本定理知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)=f(x)$。

再由牛顿−莱布尼茨公式和拉格朗日微分中值定理得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)$$

其中应用拉格朗日微分中值定理得出的 $\xi\in(a,b)$。

证法二　先提出一个引理："若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负，且 $\exists x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)>0$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$"。

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此存在最大值 M 和最小值 m，不妨设 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M, x_1,x_2\in[a,b]$。

若 $m=M$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内恒为常数，这时任取 $\xi\in(a,b)$ 均可。

若 $m<M$，令 $g(x)=M-f(x)$，显然有 $g(x_1)=M-f(x_1)>0$，由引理知

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b [M-f(x)]\mathrm{d}x>0$$

故有 $M(b-a)>\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

再令 $g(x)=f(x)-m$，当然也有 $g(x_2)=f(x_2)-m>0$，由引理可证得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>m(b-a)$$

因此　$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \Rightarrow f(x_1) = m < \dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} < M = f(x_2)$

再由连续函数的介值定理知，$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

2．推广的积分第一中值定理的改进

改进 3.2（推广的积分第一中值定理的改进）

若 $f(x)$、$g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非零不变号（即 $g(x)>0$ 或 $g(x)<0$），则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$。

证明　令　$F(x) = \int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t, G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$

则 $F(x), G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F'(x) = f(x)g(x), G'(x) = g(x) \neq 0$$

再由牛顿–莱布尼茨公式和柯西微分中值定理得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi)$$

其中应用柯西微分中值定理得出的 $\xi \in (a,b)$。

改进 3.3（推广的积分第一中值定理的改进）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号（即 $g(x) \geqslant 0$ 或 $g(x) \leqslant 0$），则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证明　由推广的积分第一中值定理知，$\exists \eta \in [a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\eta)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad (*)$$

因 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，不妨设 $g(x) \geqslant 0$，则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$。

（1）当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 时，则 $\forall \xi \in (a,b)$，都有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

此时定理的结论成立。

（2）当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ 时：

① 如果 $\eta \neq a$ 且 $\eta \neq b$，则 $\eta \in (a,b)$，定理的结论显然成立。

② 如果 $\eta = a$，下面证明 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = f(\eta)$，从而定理的结论成立。

用反证法，若在 (a,b) 内不存在 ξ，使 $f(\xi) = f(\eta)$，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的介值定理知，(a,b) 内的函数值 $f(x)$ 或者均大于 $f(\eta)$，或者均小于 $f(\eta)$。不妨设

$\forall x \in (a,b)$ 有 $f(x) > f(\eta)$ 。

由（*）式有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - f(\eta)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x)-f(\eta)]g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{**}$$

其中有 $f(x)-f(\eta)>0,\ x\in(a,b)$ 。

因 $g(x)\geqslant 0$ ，$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ ，故必存在某个小区间 $[x_i, x_{i+1}] \subset (a,b)$ ，在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上总有 $g(x)>0$ 。

又因 $f(x)-f(\eta)>0$ ， $x\in[x_i, x_{i+1}]$ ，由（**）式及定积分的性质，有

$$0 = \int_a^b [f(x)-f(\eta)]g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x)-f(\eta)]g(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

结论矛盾。

③ 如果 $\eta = b$ ，同理可证。

3．积分第二中值定理的改进

上面已经研究过，积分第一中值定理结论中的 $\xi\in[a,b]$ 可以改进为 $\xi\in(a,b)$ ，那么对于积分第二中值定理结论中的 $\xi\in[a,b]$ 能否改进为 $\xi\in(a,b)$ 呢？下面的例子说明答案是否定的。

（1）取 $[a,b]=[0,1]$ ，设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\in(0,1]\end{cases},\quad g(x)=x$$

显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调， $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，满足积分第二中值定理的条件，但 $\forall \xi\in(0,1)$ 有

$$f(0)\int_0^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(1)\int_\xi^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\xi g(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

而 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 。

（2）取 $[a,b]=[0,2\pi]$ ，设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=2\pi\\ -1, & x\neq 2\pi\end{cases},\quad g(x)=\sin x$$

显然 $f(x)$ 、$g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上满足积分第二中值定理的条件，但只有当 $\xi=0$ 或 2π 时，积分第二中值定理的结论才成立，而 $\xi\notin(0,2\pi)$ 。

在上述例题中， $f(x)$ 在 (a,b) 内恒为常数，这正是 ξ 不能在开区间 (a,b) 内取到的原因。可以证明下面的积分第二中值定理的改进定理。

改进 3.4（积分第二中值定理的改进）：

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减非负，在 (a,b) 内不恒为常数， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x$$

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增非负，在 (a,b) 内不恒为常数，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\int_\eta^b g(x)\mathrm{d}x$$

证明　（1）显然 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。设

$$I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t, x\in[a,b]$$

则 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，记 m，M 分别为 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则有

$$mf(a)\leqslant I\leqslant Mf(a) \tag{①}$$

显然 $f(a)>0$。下面分两种情形来证明。

情形 1：由式①，若 $mf(a)<I<Mf(a)$，即 $m<\dfrac{I}{f(a)}<M$，由介值定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $G(\xi)=\dfrac{I}{f(a)}$，即 $I=f(a)G(\xi)$，定理结论正确。

情形 2：若式①中至少有一个等号成立，不妨设

$$mf(a)=I \tag{②}$$

用反证法证明，若式②成立，则必 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $G(\xi)=m$。

假设 $G(x)>m,\ \forall x\in(a,b)$。由 $f(x)$ 在 (a,b) 内不恒为常数且单调递增知 $\exists a^*$、b^* 满足 $a<a^*<b^*<b$，且 $f(a^*)>f(b^*)$。则 $G(x)$ 在 $[a^*,b^*]$ 上连续，设 m^* 为 $G(x)$ 在 $[a^*,b^*]$ 上的最小值，则 $\forall x\in[a^*,b^*]$，有

$$G(x)-m\geqslant m^*-m>0 \tag{③}$$

设分割 $T{:}a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 满足 $\exists k_1,k_2$，使 $1\leqslant k_1<k_2<n-1$，且 $x_{k_1}=a^*;x_{k_2}=b^*$，故

$$I=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f(x_{i-1})\right]g(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

而

$$I_2=\sum_{i=1}^n G(x_i)\left[f(x_{i-1})-f(x_i)\right]+f(x_{n-1})G(b)$$

因此

$$\begin{aligned}I_2-mf(a)&=\sum_{i=1}^n\left[G(x_i)-m\right]\left[f(x_{i-1})-f(x_i)\right]+f(x_{n-1})\left[G(b)-m\right]\\&\geqslant\sum_{i=k_1+1}^{b_2}\left[G(x_i)-m\right]\left[f(x_{i-1})-f(x_i)\right]\geqslant\sum_{i=k_1+1}^{b_2}\left(m^*-m\right)\left[f(x_{i-1})-f(x_i)\right]\\&=(m^*-m)\left[f(x_{k_1})-f(x_{k_2})\right]=(m^*-m)[f(a^*)-f(b^*)]\end{aligned} \tag{④}$$

容易知，分割 $[a,b]$，只要 a^*、b^* 为分点，则式④必成立。

又 $\lim\limits_{|T|\to0}I_1=0$，故 $\lim\limits_{|T|\to0}I_2=I$，这样

$$I-mf(a)=\lim_{|T|\to0}\left[I_2-mf(a)\right]\geqslant(m^*-m)[f(a^*)-f(b^*)]>0$$

但与式②矛盾。因此由反证法证得$\exists\xi\in(a,b)$，使$G(\xi)=m$，即$I=mf(a)=G(\xi)f(a)$，定理结论成立。

综合情形1和情形2知，定理得证。

（2）与（1）的证明类似（略）。

改进 3.5（加强条件的积分第二中值定理的改进）

若函数$f(x)$在$[a,b]$上单调，在(a,b)内不恒为常数，$g(x)$在$[a,b]$上可积，则存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 若函数$f(x)$单调递减，则设$h(x)=f(x)-f(b)$，若函数$f(x)$单调递增，则设$h(x)=f(x)-f(a)$，由积分第二中值定理的改进，易证结论成立。

有的文献中还得到下面的结论：

定理 $f(x)$在$[a,b]$上单调，则对任意$[a,b]$上可积函数$g(x)$，存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x$的充要条件是$f(x)$在$(a,b)$内不恒为常数或者$f(x)$在闭区间$[a,b]$上恒为常数。

证明详见：华梦霞，陈庆．关于积分第二中值定理改进的一个注记．大学数学，2010，6．

3.5.2 积分第一中值定理的推广

1．把连续的区间推广到开区间

积分第一中值定理 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

推广 3.1

若$f(x)$在(a,b)内连续，而在$x=a$及$x=b$为第一类间断点（或只有一个第一类间断点而另一端点是连续点），则在(a,b)内至少有一点ξ使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

证明 设$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b)\\ \lim\limits_{x\to a+}f(x), & x=a\\ \lim\limits_{x\to b-}f(x), & x=b\end{cases}$，所以$F(x)$是在$[a,b]$上的连续函数。

对$F(x)$利用改进的积分第一中值定理，有$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x=F(\xi(b-a),\xi\in(a,b)$。

由于在(a,b)上$F(x)=f(x)$以及$\xi\in(a,b)$，所以有$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，故

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$ 成立。

推广 3.2　若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$x=a$ 是连续点或第一类间断点，$x=b$ 为瑕点，且广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证明　由广义积分收敛知，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，由推广 1 得 $\exists\xi\in(a,b-\varepsilon)\subset(a,b)$，使得

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-\varepsilon-a)$$

故
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi)(b-\varepsilon-a) = f(\xi)(b-a)$$

类似地，可得推广 3.3 和推广 3.4。

推广 3.3　若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$x=b$ 是连续点或第一类间断点，$x=a$ 为瑕点，且广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

推广 3.4　若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$x=a$、$x=b$ 为瑕点，且广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证明　取 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

由上述推广得，$\exists\xi_1\in(a,x_0)$、$\xi_2\in(x_0,b)$ 使得

$$\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi_1)(x_0-a) = f(\xi_1)\cdot\frac{b-a}{2},$$

$$\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi_2)(b-x_0) = f(\xi_2)\cdot\frac{b-a}{2}$$

故
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)}{2}(b-a)$$

又因 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，所以由介值定理知，$\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$ 使得

$$f(\xi) = \frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)}{2}$$

故
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

2．把连续的条件推广到可积

推广的积分第一中值定理 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$。

推广 3.5 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则存在 $\mu\in[m,M]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，$M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$。

证明 根据确界定义有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，不妨设 $g(x)\geqslant 0$，故有 $mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$。从而

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{①}$$

当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$ 时，由式①可得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$，此时结论成立。

当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$ 时，由式①可得

$$m\leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant M$$

令 $\mu=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$，可得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

当在推论 3.5 中令 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，上式可写为

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

即为推广的积分第一中值定理。

推广 3.6 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且存在原函数，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数，设原函数为 $F(x)$，则有 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，由可导与连续的关系知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、可导。对区间 $[a,b]$ 作任意分割：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{a-1}<x_a=b,\qquad \Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$$

由微分中值定理知存在 $\xi\in[x_{i-1},x_i]$，使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

从而有　$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]=\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

又因为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以令 $\Delta=\max\Delta x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 对上式两端取极限得

$$F(b)-F(a)=\lim_{\Delta\to 0}\left[F(b)-F(a)\right]=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

又因为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、可导，所以由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)$$

故有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$ 。

推广 3.7　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且存在原函数， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

证明详见：关若峰．积分中值定理的推广．广州大学学报：自然科学版，2004，12．

推广 3.8　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上具有介值性， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有介值性是指：若 $f(x_1)\neq f(x_2)$ ， $x_1,x_2\in[a,b]$ ，则对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的数μ，必存在介于 x_1 与 x_2 之间的点 ξ ，使得 $f(\xi)=\mu$ 。

证明详见：李衍禧．积分第一中值定理的推广．数学的实践与认识．2007，5．

3．把中值点的个数推广

推广 3.9　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不恒为常数，则 $\exists\xi_1,\xi_2\xi_3\in(a,b)$ ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi_1)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<f(\xi_2)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>f(\xi_3)(b-a)$$

证明　直接利用积分第一中值定理得 $\exists\xi_1\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi_1)(b-a)$$

令　$$G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}(x-a)$$

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由变限积分函数的性质知，$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

$$G'(x)=f(x)-\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a},\quad G(a)=G(b)=0$$

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为常数，故 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不是线性函数，它与线性函数 $\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}(x-a)$ 的差不恒为常数，即 $G(x)$ 不恒为 0，亦即 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值至少有一个不为 0。

不妨设最大值 $G(\eta)\neq 0$ 且 $G(\eta)>0=G(a)=G(b)$，显然 $G(x)$ 在 $[a,\eta]$ 上满足拉格朗日微分中值定理的条件，所以 $\exists\xi_2\in(a,\eta)\subset(a,b)$ 使得

$$G'(\xi_2)=\frac{G(\eta)-G(a)}{\eta-a}>0$$

即得
$$f(\xi_2)-\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}>0$$

故
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<f(\xi_2)(b-a)$$

同理 $\exists\xi_3\in(\eta,b)\subset(a,b)$ 使得 $G'(\xi_3)=\dfrac{G(b)-G(\eta)}{b-\eta}<0$，即得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>f(\xi_3)(b-a)$$

推广 3.10 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调，则存在唯一一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

证明 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递减，此时 $f(x_2)<f(x_1)$，令 $K^*=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，则 $-\infty<K^*<0$，同理可证存在 $\lambda^*\in(-1,0)$ 使得 $K^*<\lambda^*$，即

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\lambda^* \qquad ①$$

在空间 $C[a,b]$ 中做映射 $T:T(x)=f(x)-\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}+x$，$\forall x\in[a,b]$，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递减，所以 $f(b)\leqslant f(x)\leqslant f(a)$，且 $f(b)<\dfrac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}{b-a}<f(a)$，于是 $T(x)\in[a,b]$，从而 T 是 $[a,b]$ 到自身的映射。又对于任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，且 $x_1<x_2$，有

$$|T(x_2)-T(x_1)|=|(x_2-x_1)+(f(x_2)-f(x_1))|$$

由式①可知必存在 $\lambda\in(-1,0)$，使得 $\left(f(x_2)-f(x_1)\right)<\lambda(x_2-x_1)<0$。

因此有

$$|T(x_2)-T(x_1)|=|(x_2-x_1)+(f(x_2)-f(x_1))|\leqslant(1+\lambda)|x_2-x_1|$$

又因为$0<1+\lambda<1$，所以T是$[a,b]$到自身的压缩映射，由压缩映射定理知，存在唯一的一点$\xi\in[a,b]$，使得$T(\xi)=\xi$，即$f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{b-a}$，从而有

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)(b-a) \tag{②}$$

又由改进的积分第一中值定理知，在开区间(a,b)内至少存在一点η，使得$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a)$。与式②对照可得$\eta=\xi$，故在$(a,b)$内存在唯一一点$\xi$使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

下面，在积分第一中值定理的条件下，给出类似于积分第二中值定理结果形式的定理，可以称之为混合积分中值定理。

推广 3.11　若$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上可积，$g(x)$在$[a,b]$上不变号，则存在$\xi,\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=m\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x+M\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=M\int_a^\eta g(x)\mathrm{d}x+\quad m\int_\eta^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

其中$m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$。

证明　不妨设$g(x)\geqslant 0$，由$m\leqslant f(x)\leqslant M$可得$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$，从而

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

令$h(x)=m\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t+M\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$，则$h(x)$在$[a,b]$上连续且

$$h(a)=M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,\quad h(b)=m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

由连续函数的介值定理可得，存在$\xi\in[a,b]$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=m\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x+M\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

即结论成立。

同法可得　$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=M\int_a^\eta g(x)\,\mathrm{d}x+m\int_\eta^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

4．把积分中值定理的形式推广

推广 3.12　若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^\xi f(t)\,\mathrm{d}t=(b-\xi)f(\xi)$$

证明　做辅助函数　$$F(x)=(x-b)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

由$f(x)$在$[a,b]$上连续知，$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$F(a)=$

$F(b)=0$，

故由洛尔中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $F'(\xi)=0$，从而

$$\int_a^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t+\xi f(\xi)-bf(\xi)=0$$

即
$$\int_a^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t=(b-\xi)f(\xi)$$

推广 3.13 若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x}$$

证明 做辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}\cdot\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，故由洛尔中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $F'(\xi)=0$，从而

$$f(\xi)=\frac{\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x}\cdot g(\xi)$$

即
$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x}$$

推广 3.14 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$，则对于每一个实数 λ，在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\lambda\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 做辅助函数
$$F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，故由洛尔中值定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $F'(\xi)=0$，而

$$F'(x)=-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x)$$

所以
$$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\int_a^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\lambda\xi}f(\xi)$$

即
$$f(\xi)=\lambda\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

5．把定积分的积分中值定理推广到其他积分

推广 3.15（二重积分中值定理）

若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，函数 $g(x,y)$ 在 D 不可积且不变号，则存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

推广 3.16（第一类曲线积分中值定理）

若函数 $f(x,y)$ 在光滑有界闭曲线 C 上连续，则在曲线 C 上至少存在一点 (ξ,η)，使 $\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = f(\xi,\eta)\overline{S}$，其中 $\overline{S}$ 表示曲线 C 的长。

推广 3.17（第二类曲线积分中值定理）

若函数 $f(x,y)$ 在有向光滑曲线 C 上连续，则在曲线 C 上至少存在一点 (ξ,η)，使 $\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \pm f(\xi,\eta)\cdot I$，其中 I 为有向光滑曲线 C 在 x 轴上的投影，符号“±”由曲线 C 的方向确实。

推广 3.18（第一类曲面积分中值定理）

若 D 为 xOy 平面上的有界闭区域，$z = z(x,y)$ 是光滑曲面 S，函数 $f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则曲面 S 上至少存在一点 (ξ,η,ζ)，使 $\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot A$，其中 A 是曲面 S 的面积。

推广 3.19（第二类曲面积分中值定理）

若有光滑曲面 $S{:}\,z = z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，其中 D_{xy} 是有界闭区域，函数 $f(x,y,z)$ 在 S 连续，则在曲面 S 上至少存在一点 (ξ,η,ζ)，使 $\int_S f(x,y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm f(\xi,\eta,\zeta)\cdot\overline{A}$。其中 $\overline{A}$ 是 S 的投影 D_{xy} 的面积。

3.5.3 积分第二中值定理的推广

积分第二中值定理

（1）若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调，$g(x)$ 在$[a,b]$上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

（2）若函数 $f(x)$ 在$[a，b]$上单调递减且非负，$g(x)$ 在$[a，b]$上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x$$

（3）若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调递增且非负，$g(x)$ 在$[a,b]$上可积，则存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\int_\eta^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

1．把闭区间推广到开区间

推广 3.20

（1）若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可积单调，$f(a+0)\neq f(b-0)$，$g(x)$ 在上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a+0)\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x+f(b-0)\int_{\xi}^{b}g(x)\,\mathrm{d}x$$

（2）若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可积，单调递减且非负，$f(a+0)\neq f(b-0)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a+0)\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x$$

（3）若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可积，单调递增且非负，$f(a+0)\neq f(b-0)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$上可积，则存在 $\eta\in\left[a,b\right]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(b-0)\int_{\eta}^{b}g(x)\,\mathrm{d}x$$

证明详见：原华丽．关于积分第二中值定理的探究．山东师范大学学报：自然科学版，2004，（9）．

2．把闭区间推广到无穷区间

推广 3.21

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内单调有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积，且 $g(x)$ 没有 $-\infty$ 和 $+\infty$ 以外的暇点，则存在 $\xi\in[a,+\infty]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x+f(+\infty)\int_{\xi}^{b}g(x)\,\mathrm{d}x$$

（3）若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，且 $g(x)$ 没有 $+\infty$ 以外的暇点，则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(-\infty)\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x+f(+\infty)\int_{\xi}^{b}g(x)\,\mathrm{d}x$$

（证明详见：刘红超．关于积分第二中值定理的研究．湖北大学 2010 级硕士学位论文）．

3．把单调的条件推广到可积

推广 3.22

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值分别为 m_f,M_f 和 m_g,M_g，那么存在 $\xi,\ \eta\in[a,b]$，$\xi^*,\eta^*\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=m_f\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x+M_f\int_{\xi}^{b}g(x)\,\mathrm{d}x+m_g(M_f-m_f)(\xi-\eta),$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=m_g\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x+M_g\int_{\xi}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x+m_f(M_g-m_g)(\xi^*-\eta^*)$$

（证明详见：张新元．积分中值定理的较一般情况的几何意义及其推广形式．大学数学，2010，6）．

参 考 文 献

[1] 潘宇，刘证．关于定积分的两个中值定理．鞍山科技大学学报，2003，(4).

[2] 张新元．积分中值定理的较一般情况的几何意义及其推广形式．大学数学，2010，(6).

[3] 赵纬经，王贵君．改进的第一积分中值定理及其应用．新疆师范大学学报：自然科学版，2007，(6).

[4] 曹定华，刘长荣．积分中值定理的改进．数学理论与应用，2004，(12).

[5] 陈卫星，马全中．关于积分中值定理及推广的积分中值定理的改进．中国煤炭经济学院学报，1994，(1).

[6] 刘小茂，张钧．关于积分第二中值定理的讨论．武汉汽车工业大学学报，1996，(6).

[7] 华梦霞，陈庆．关于积分第二中值定理改进的一个注记．大学数学，2010，(6).

[8] 张安梅，哀志强．微分中值定理与积分中值定理的一致性．通化师范学院学报，2007，(12).

[9] 姚力，李香玲．微分中值定理与积分第一中值定理的关系．河北建筑工程学院学报，2003，(3).

[10] 王刚，郑玫．微积分中值定理的证明．重庆师范学院学报：自然科学版，1996，(9).

[11] 刘润辉．微积分中值定理的统一证明及推广形式．株洲师范高等专科学校学报，2005，(10).

[12] 李仕琼，梁波．积分第一中值定理的证明及其推广．重庆文理学院学报：自然科学版，2006，(8).

[13] 宁存法，陈丫丫．关于积分中值定理的注记．太原大学教育学院学报，2007，(6).

[14] 关若峰．积分中值定理的推广．广州大学学报（自然科学版），2004，(12).

[15] 李衍禧．积分第一中值定理的推广．数学的实践与认识，2007，(5).

[16] 严振祥．定积分中值定理的推广．上海海运学院学报，1995，(3).

[17] 宫小芳．积分第一中值定理的证明与推广．内蒙古财经学院学报：综合版，2011，(9).

[18] 原华丽．关于积分第二中值定理的探究．山东师范大学学报：自然科学版，2004，(9).

[19] 刘红超．关于积分第二中值定理的研究．湖北大学 2010 级硕士学位论文．

[20] 丁殿坤，马芳芳．微积分第一基本定理和积分中值定理的新证法．齐齐哈尔大学学报，2007，(5).

[21] 徐秋丽．关于积分第一中值定理的证明和推广．长春师范学院学报：自然科学版，2005，(3).

[22] 韩云芷，田艳先.积分中值定理的构造性证明．保定师范专科学校学报，2007，(10).

第 4 章　积分关系定理

积分按其未知数的个数，可分为一元积分学与多元积分学。一元积分学又分为不定积分与定积分两大类，多元积分学又分为重积分、曲线积分、曲面积分。这些积分之间都存在着一定的关系，微积分基本定理（牛顿–莱布尼茨公式）是一元积分学的关系定理，格林定理（Green 公式）、高斯定理（Gauss 公式）、斯托克斯定理（Stokes 公式）是多元函数积分学的关系定理。这些定理不仅刻画了函数在某种几何形体上的总体性质和在边界上的性质之间的关系，而且实现了各种积分之间的转化。掌握积分之间的关系，对各类积分的总体认识及积分的计算有着重要的意义。牛顿–莱布尼茨公式已在第 1 章中进行了研究，本章主要对格林公式、高斯公式、斯托克斯公式进行研究。

4.1　积分关系定理的历史演变

格林公式是由英国数学家、物理学家格林（George Green，1793－1841）提出的。格林 8 岁时曾就读于一所私立学校，在校期间就表现出非凡的数学才能，可惜这段学习仅延续了一年左右。1802 年夏天，格林就辍学回家，帮助父亲在磨坊做工。但格林始终未忘记他对数学的爱好，以惊人的毅力坚持白天工作，晚上阅读从图书馆借来的数学书籍。对格林影响最大的是法国数学家拉普拉斯、拉格朗日、泊松等人的著作。通过钻研，格林不仅掌握了纯熟的分析方法，而且能创造性地发展、应用。

1825 年格林完成并由朋友集资出版了他的第一篇也是最重要的论文“数学分析在电磁学中的应用”。该论文中引入了位势概念、发展了电磁理论，发现了函数在平面区域上的二重积分与沿这个区域边界上的曲线积分之间的关系——格林公式，格林公式的诞生，沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的关系，使一些复杂难算的第二型曲线积分得到了有效的解决。他通过这个公式来求关于面积、二重积分、第二类曲线积分与路径的关系等。

林肯郡的贵族、皇家学会会员勃隆黑德爵士看到了“数学分析在电磁学中的应用”，并发现了作者的数学才能，特地在自己的庄园接见格林。与勃隆黑德的结识成为格林一生的转折点，剑桥大学冈维尔与凯斯学院出身且又是剑桥分析学会的创始人之一的勃隆黑德，鼓励他到剑桥深造，继续研究数学。1829 年，格林的父亲去世，格林遂将磨坊变卖，全力以赴为进入剑桥大学做准备。这期间他又完成了三篇论文，均由勃隆黑德爵士推荐发表。1833 年 10 月，年已 40 的格林终于跨进了剑桥大学的大门，成为冈维尔与凯斯学院的自费生。经过 4 年艰苦的学习，1837 年获剑桥数学

荣誉考试一等第四名，翌年获学士学位，1839 年当选为冈维尔与凯斯学院院委，任剑桥大学教授。

正当一条更加宽广的科学道路在格林面前豁然展现之时，这位磨坊工出身的自学成才的数学家却积劳成疾，不得不回家乡休养，于 1841 年 5 月 31 日病故。

格林的论文“数学分析在电磁学中的应用”，由于印数不多，传播范围不广，在格林在世时并未引起人们的充分注意，后来被英国数学物理学家汤姆逊（1824－1907 年）发现，并认识到它的巨大价值，1854 年，他将这篇论文重新发表在著名的数学期刊《数学杂志》上，此时格林已逝世 14 年了。格林的这篇论文，在数学和物理研究中都有着重要的意义，首先，他开创了用纯数学方法研究电磁学等物理问题的先河，在他工作的影响下，形成了一个著名的剑桥数学物理学派。

高斯公式又称为奥斯特洛夫斯基–高斯公式、奥高公式、奥斯特洛夫斯基公式、高斯散度定理。奥斯特洛夫斯基（1806－1862 年）是 19 世纪俄国最伟大的数学家、物理学家，他在 1828 年研究体积积分和曲面积分的相互关系时，得到这一公式，后又将它推广到 n 重积分上去。

奥斯特洛夫斯基得到的这个公式与高斯（1777－1855 年）利用数学知识研究静电学有关，1839 年高斯发表了《距离平方成反比的吸引力和排斥力的普遍定理》一文，在证明泊松方程后，得到了被称为电通量形式的高斯公式。

斯托克斯（1819－1905 年），英国数学家，物理学家，剑桥数学物理学派的代表人物之一，后被英王封为爵士。斯托克斯公式的公开出现是作为剑桥大学 1854 年度史密斯奖学金考试的第八题，这一由剑桥大学里数学最优秀的学生参加的考试，从 1849 年至 1882 年由斯托克斯主持，因此这一公式被人们称为斯托克斯公式。实际上，这一公式是汤姆逊在 1850 年 7 月 2 日写给斯托克斯信中给出的，当时人们至少给出了三个证明：汤姆逊给出第一个，另两个分别见于汤姆逊和泰特合著的《自然哲学》和麦克斯伟的《电磁论》（1881 年）等书籍中。

4.2　积分关系定理的内容与证明

4.2.1　格林公式及其证明

1．格林公式的几种形式

若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且有一阶的连续偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \qquad ①$$

这里 L 为闭区域 D 的边界曲线，并取正方向。公式①称为格林公式。

为帮助记忆，格林公式可以写成如下形式：

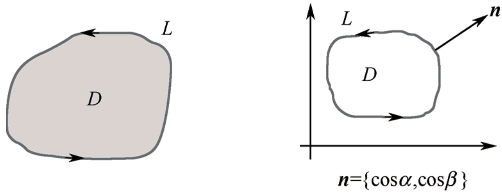


图 4.1

$$\iint\limits_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \quad ②$$

格林公式可以用第一型曲线积分表示成如下形式：

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s \quad ③$$

如果设 $\boldsymbol{v} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 是连续可微的向量场，$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，曲线积分 $\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 称为向量场 $\boldsymbol{v}$ 在曲线 L 的环流量，环量描述向量场 $\boldsymbol{v}$ 在曲线 L 所围的区域内有无旋涡。如果定义向量 $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right)\boldsymbol{k}$ 为向量场 $\boldsymbol{v}$ 在点 $M(x,y)$ 处的旋度，记作 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$，则可得到格林公式的旋度形式：

$$\iint\limits_D \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \quad ④$$

如果设 $\boldsymbol{v} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 是连续可微的向量场，曲线积分 $\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$ 称为向量场 $\boldsymbol{v}$ 通过有向曲线 L 的通量，有向曲线 L 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$。若向量场 $\boldsymbol{v}$ 为流速场时，$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$ 表示单位时间内通过曲线 L 的流量。如果定义 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ 为向量场 $\boldsymbol{v}$ 在点 $M(x,y)$ 处的散度，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$，散度刻画了流体在一点的流量。则可得到格林公式的散度形式：

$$\iint\limits_D \mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s \quad ⑤$$

若记 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}s$，则格林公式又可写成

$$\iint\limits_D \mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad ⑥$$

2．格林公式的内容与证明

定理 4.1 若函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且有一阶的连续偏导数，则有

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

其中 L 为闭区域 D 的边界曲线，并取正方向。

证明　根据区域 D 的不同形状，一般可分为三种情形来证明。

（1）如图 4.2 所示，若区域 D 既是 X–型又是 Y–型，即平行于坐标轴的直线和 L 至多交于两点。

$$D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$$

这里 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$ 分别为曲线 $\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{AEB}$ 的方程，而 $x=\psi_1(y)$ 和 $x=\psi_2(y)$ 则分别为曲线 $\overset{\frown}{CAE}$ 和 $\overset{\frown}{CBE}$ 的方程。

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}\sigma &= \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)\mathrm{d}y\\ &=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{EAC}}Q(x,y)\mathrm{d}y\\ &=\oint_{CBEAC}Q(x,y)\mathrm{d}y=\oint_L Q(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

同理可证
$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x$$

两式相加得
$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

（2）若区域 D 由按段光滑的闭曲线围成，如图 4.3 所示，将 D 分成三个既是 X 型又是 Y 型的区域 D_1，D_2，D_3，则

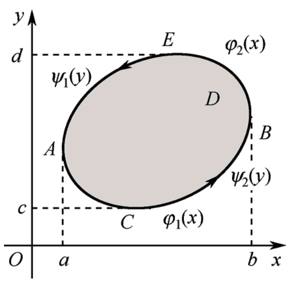


图 4.2

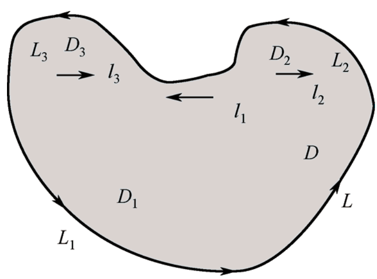


图 4.3

$$\begin{aligned}&\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\oint_{L_1+l_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{L_2+l_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{L_3+l_3}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\ &=\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_3}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\ &=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y(L_1,L_2,L_3\text{对}D\text{来说为正方向})\end{aligned}$$

（3）若区域不止由一条闭曲线围成，添加直线段 AB，CE，则 D 的边界由 AB，L_2，BA，AFC，CE，L_3，EC 及 CGA 构成，如图 4.4 所示。由（2）知

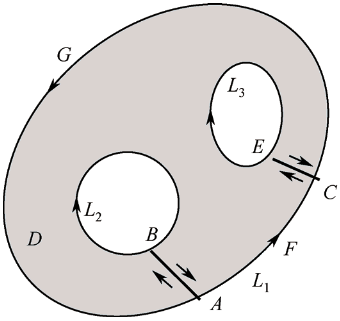


图 4.4

$$\begin{aligned}&\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\left\{\int_{AB}+\int_{L_2}+\int_{BA}+\int_{\overset{\frown}{AFC}}+\int_{CE}+\int_{L_3}+\int_{EC}+\int_{\overset{\frown}{CGA}}\right\}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)\\&=\left(\oint_{L_2}+\oint_{L_3}+\oint_{L_1}\right)(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)\\&=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y(L_1,L_2,L_3\text{对}D\text{来说为正方向})\end{aligned}$$

4.2.2　高斯公式及其证明

1．高斯公式的几种形式

设空间闭区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成，若函数 P,Q,R 在 V 上连续，且有一阶的连续偏导数，则

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad ①$$

其中 S 取外侧。公式①称为高斯公式。

高斯公式也可以用第一类曲面积分表示成如下形式：

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s \qquad ②$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 S 上点 $M(x,y,z)$ 处的单位法向量的方向余弦。

设有向量场 $\boldsymbol{v}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，其中 P,Q,R 具有连续的一阶偏导数，S 是场内的一片有向曲面，其单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，我们称曲面积分 $\iint_S\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 为向量场 $\boldsymbol{v}$ 通过曲面 S 的通量（流量）。如果定义 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 为向量场 $\boldsymbol{v}$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的散度，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$，则可得到高斯公式的散度形式：

$$\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V\mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}V \qquad ③$$

则高斯公式的物理解释为：穿过任意闭合曲面的通量（流量）等于散度对闭合面所包围的体积的积分。

若记 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$，称为向量微分算子（哈密顿算子），则 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 可写成 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$，高斯公式又可写成微分算子形式：

$$\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V \qquad ④$$

若由数量函数 $u=u(x,y,z)$ 定义的向量函数 $\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 称为梯度，记

为 $\mathrm{grad}u$，则高斯公式可写成梯度形式：

$$\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V \mathrm{grad}u\mathrm{d}V \tag{⑤}$$

2．高斯公式的内容与证明

定理 4.2（**高斯公式**）　设空间闭区域V由分片光滑的双侧封闭曲面S围成，若函数P,Q,R在V上连续，且有一阶的连续偏导数，则

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S取外侧。

证明　下面只证$\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。类似地有$\iiint_V\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S P\mathrm{d}x\mathrm{d}y$、$\iiint_V\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

这些结果相加便得到高斯公式。

先设V是一个xy区域，即其边界曲面S由曲面：$S_2:z=z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，$S_1:z=z_1(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，及垂直于$D_{xy}$的边界的柱面$S_3$组成，其中$z_1(x,y)\leqslant z_2(x,y)$。如图 4.5 所示。

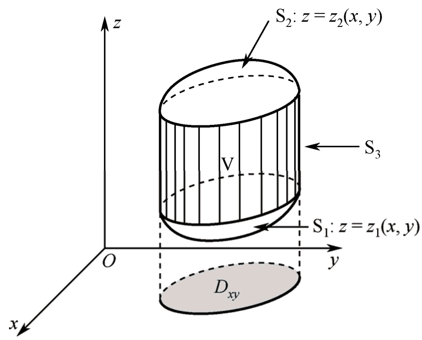


图 4.5

于是由三重积分的计算方法有

$$\begin{aligned}\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\\&=\iint_{D_{xy}}\big(R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{S_2}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{S_2}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{-S_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中 S_1,S_2 都取上侧。又由于 S_3 在 xy 平面上的投影区域的面积为零，所以 $\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

因此
$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{S_2} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{-S_1} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_3} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint\limits_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对于不是 xy 型区域的情况，则用有限个光滑曲面将它分割成若干个 xy 型区域来讨论。

4.2.3 斯托克斯公式及其证明

1．斯托克斯公式的几种形式

设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线，若函数 P,Q,R 在 S（连同 L）上连续，且有一阶的连续偏导数，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad ①$$

其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定。公式①称为斯托克斯公式。

为便于记忆，斯托克斯公式常写成如下的形式：

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} \quad ②$$

若记 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为分片光滑有向曲面 S 在点 (x,y,z) 处的单位法向量，$\boldsymbol{\tau}=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\mu)$ 为按段光滑有向曲线 L 在点 (x,y,z) 处的单位切向量，我们利用两类曲线积分间的联系和两类曲面积分间的联系，可得到斯托克斯公式的另外三种形式：

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S \quad ③$$

$$\begin{aligned}&\oint_L (P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\eta)\mathrm{d}s\\ &=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \quad ④$$

$$\begin{aligned}&\oint_L (P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\eta)\mathrm{d}s\\ &=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S\end{aligned} \quad ⑤$$

下面我们在给出斯托克斯公式的其他形式：

设有向量场 $\boldsymbol{v}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，其中 P,Q,R 具有连续的一阶偏导数，我们把沿有向闭曲线 L 的曲线积分

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \oint_L (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\eta)\mathrm{d}s$$

叫做向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿有向闭曲线 L 的环流量；环流量所描述的是向量场 $\boldsymbol{v}$ 在封闭曲线 L 所包围的区域内有无漩涡的总体性质。

我们把向量

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

叫做向量场 $\boldsymbol{v}$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的旋度，记作 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 在曲面 S 的法向量上的投影。

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}=P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\eta$$

为向量 $\vec{v}$ 在 L 的切向量上的投影。

现在，斯托克斯公式可写成如下向量的形式：

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \qquad ⑥$$

公式⑥称为斯托克斯公式的旋度形式，物理解释为：向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿有向闭曲线 L 的环流量等于向量场 $\boldsymbol{v}$ 的旋度场通过 L 所张的曲面 S 的通量，这里 L 的正向与 S 的侧应符合右手规则。

记 $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial xy}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$，称为向量微分算子（哈密顿算子），则

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial xy}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\times(P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$$

斯托克斯公式又可写成微分算子形式：

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \qquad ⑦$$

2．斯托克斯公式的内容与证明

定理 4.3　设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线，若函数 P,Q,R 在 S（连同 L）上连续，且有一阶的连续偏导数，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定。

证明　情形一：假设 S 与平行于 z 轴的直线相交于一点，并设 S 为曲面

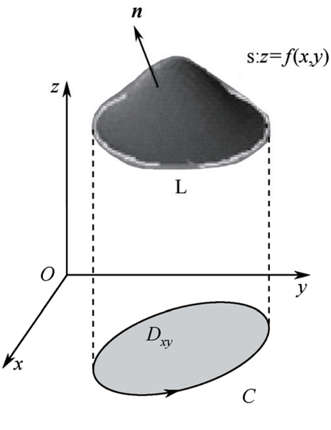


图 4.6

$z=f(x,y)$ 上侧，S 的正向边界曲线 L 在 xOy 的投影为有向曲线 C，且所围区域为 D_{xy}，如图 4.6 所示。

因为

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

而 $\cos\beta=-f_y\cos\gamma$，代入上式得

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f_y\right)\cos\gamma\mathrm{d}S$$

即

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又由复合函数的求导法则知

$$\frac{\partial}{\partial y}P[x,y,f(x,y)]=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot f_y$$

所以得

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}P[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再根据格林公式得

$$\oint_c P[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}P[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 $P[x,y,f(x,y)]$ 在平面曲线 C 上点 (x,y) 处的值与 $P(x,y,z)$ 在空间曲线 L 上对应点 (x,y,z) 处的值相同，并且两曲线上的对应小弧段在 x 轴上的投影也一样，根据曲线积分的定义有

$$\oint_c P[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x=\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x$$

故

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x=\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

如果 S 取下侧，L 也相应地改成相反的方向，那么 $\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x=\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的两端同时改变符号，仍成立。

同理可证

$$\oint_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y=\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\oint_L R(x,y,z)\mathrm{d}y=\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

将三式相加得

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

情形二：如果曲面 S 与平行于 z 轴的直线的交点多于一个，则可通过做辅助线、面把 S 分成与平行 z 轴直线只交于一点的几部分，在每部分上应用斯托克斯公式，然后相加，由于沿辅助曲线方向相反的两个曲线积分相加正好抵消，所以对这类曲面斯托克斯公式仍成立。

4.3　积分关系定理的相关内容分析

4.3.1　各类积分的起源与几何意义

积分的概念来源于实践，积分中的定积分、重积分、曲线积分和曲面积分的概念都是通过具体的实际问题引入的，最终又用它去解决实际问题。

定积分的概念从计算“曲边梯形的面积”等问题引入，二重积分从计算“曲顶柱体体积”引入，三重积分则是从求“三维空间中的有界物体的质量”引入的，第一类曲线积分从求“物质曲线的质量”中引入，第二类曲线积分从计算“力场做功问题”引入，第一类曲面积分从求“物质曲面质量问题”引入，第二类曲面积分则是从“讨论流量问题”引入的。

解决上述这些实际问题的方法也是一致的，均是利用“分割近似求和取极限”的数学思想加以解决的。

4.3.2　各类积分之间的关系

1．定积分与重积分，定积分与线积分、面积分的关系

一元函数定积分是多元函数几种积分的基础，二重积分、三重积分、第一类曲线积分、每一类曲面积分是定积分不同形式的推广。

（1）一元函数积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的被积函数 $f(x)$的积分区域为直线上的区间$[a,b]$，若被积函数的自变量增至两个或三个，积分区域从一维空间的直线段推广为二维空间的区域 D 或三维空间的区域 V，定积分即推广为二重积分或三重积分。如图 4.7 所示。

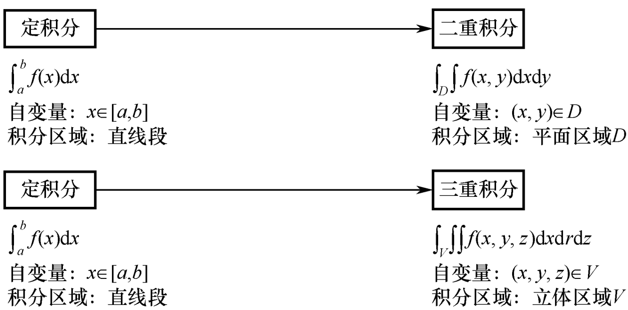


图 4.7

（2）在一元函数定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中，被积函数的自变量增至两个或三个，积分

区域由一维空间的直线段推广为二维空间的曲线弧或三维空间的曲面块，定积分即推广为第一型曲线积分或第一类曲面积分，如图 4.8 所示。

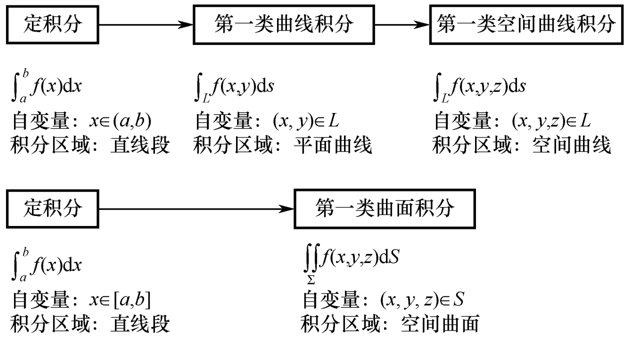


图 4.8

2．重积分与线积分、面积分的关系，线积分与面积分的关系

（1）二重积分与二维空间上的曲线积分之间的关系由格林公式给出。格林公式沟通了沿封闭曲线的积分与二重积分之间的联系，给出了利用二重积分计算第二类的曲线积分的方法。

（2）三重积分与三维空间上的曲面积分之间的关系由高斯公式给出。高斯公式沟通了沿封闭曲面的积分与三重积分之间的联系，给出了利用三重积分计算第二类曲面积分的方法。

（3）三维空间上，曲线积分与曲面积分之间的关系，由斯托克斯公式给出。斯托克斯公式沟通了沿封闭曲线的曲线积分与曲面积分之间的联系，给出了利用第二类曲面积分计算空间第二类曲线积分的方法。

各种积分之间的关系可用图 4.9 来表述。

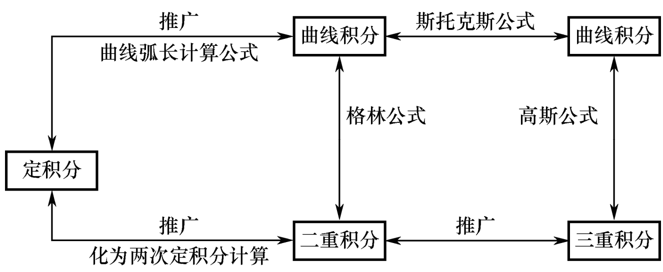


图 4.9

格林公式、高斯公式、斯托克斯公式都揭示了在某个区域（二维空间的平面区域、三维空间的立体区域与曲面块）上的积分与沿着该区域的边界（二维空间的封闭曲线、三维空间的封闭曲线和封闭曲面）上的积分之间的内在联系，事实上，一元函数定积分的牛顿−莱布尼茨定理揭示了展布于数直线上区间$[a,b]$的 $f(x)$的定积

分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与函数 $F(x)$ 在区间的两端点 a,b（即积分区域 $[a,b]$ 的边界）的函数值之间的联系。因此，从这个意义上讲，上述四个公式可以统一起来，用一个公式表述。

4.3.3　各类积分之间的转化

各类积分在计算上是可以转化的，定积分作为各类积分的基础，其他积分最终均可以转化为定积分。如不定积分与定积分的转化是通过牛顿−莱布尼茨公式实现的，所有多元函数积分的计算最终都转化为计算定积分。累次积分法可将重积分化为定积分，两类曲线积分是通过基本计算公式将其直接转化为定积分的，而两类曲面积分则是通过基本计算公式先将其转化为二重积分再转化为定积分的。

格林公式可实现二重积分和第二类曲线积分之间的转化，高斯公式可实现三重积分和第二类曲面积分之间的转化，斯托克斯公式可实现第二类曲线积分和第二类曲面积分之间的转化。事实上，牛顿−莱布尼茨公式把区间 $[a,b]$ 的定积分转化为 $[a,b]$ 点的函数值，格林公式是把区间 D 上的二重积分转化成 D 边界曲线 L 上的线积分，高斯公式是把空间区域的三重积分转化为边界曲面上的积分，斯托克斯公式是把一般曲面上的面积积分转化为边界线上的线积分；格林公式是高斯公式的特殊情形，而斯托克斯公式则是格林公式的推广。这三个公式均为牛顿−莱布尼茨公式在高维上的推广，在牛顿−莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式这四个重要积分公式中，牛顿−莱布尼茨公式是基础，格林公式是核心定理。

牛顿−莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式这四个积分公式的转化关系可以用图 4.10 表示。

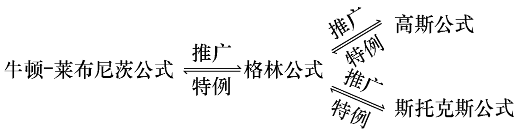


图 4.10

4.3.4　四个积分公式之间的关系

1．四个积分公式几何意义的关系

牛顿−莱布尼茨公式揭示了闭区间上一元函数定积分与原函数在区间端点的数值之间的关系，格林公式表达了平面闭区域上的曲线积分与所围成区域的二重积分之间的关系，高斯公式揭示了空间闭曲面上曲面积分与所围空间区域上三重积分的关系，斯托克斯公式则把曲面积分与沿曲面的边界曲线的曲线积分联系了起来。

从整体来看，四个公式分别实现了一维（牛顿−莱布尼茨公式）、二维（格林公式）和三维（高斯公式和斯托克斯公式）上定积分、线积分、面积分和重积分之间的相互转化。其转化关系可以表示为图 4.11。

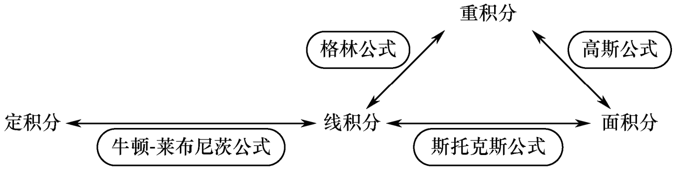


图 4.11

2．牛顿–莱布尼茨公式与格林公式的关系

定理（牛顿－莱布尼茨公式） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且存在原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$， $x\in[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

定理 4.1（格林公式） 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且有一阶的连续偏导数，则有

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中 L 为闭区域 D 的边界曲线，并取正方向。

牛顿–莱布尼茨公式把一个函数在闭区间上的定积分与一个相关函数在该区间的“边界”（即区间端点）上函数值的增量联系起来，换句话说就是牛顿–莱布尼茨公式把计算闭区间上的定积分（特殊的线积分）转化为计算该区间端点处的函数值。而格林公式把计算闭区域上的二重积分（特殊的曲面积分）转化为计算该区域边界曲线上的线积分，因此它们的实质是一样的。并且在一定情况下，高斯公式可以转化为牛顿–莱布尼茨公式，也就是说牛顿–莱布尼茨公式是格林公式的特殊情况。

在格林公式中，令 $D:a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant 1$，$P(x,y)=0,Q(x,y)=f(x)$，且 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上具有连续导数，则有

$$\iint\limits_D f'(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L f(x)\mathrm{d}y$$

于是
$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y=\int_0^1 f(b)\mathrm{d}y-\int_0^1 f(a)\mathrm{d}y$$

即
$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

为牛顿–莱布尼茨公式。

3．格林公式与高斯公式的关系

定理 4.1（格林公式） 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且有一阶的连续偏导数，则有

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中 L 为闭区域 D 的边界曲线，并取正方向。

定理 4.2（高斯公式）　设空间闭区域V由分片光滑的双侧封闭曲面S围成，若函数P,Q,R在V上连续，且有一阶的连续偏导数，则

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S取外侧。

高斯公式将一个函数在空间闭区域上的积分跟一个相关联的函数在该闭区域的边界曲面上的积分联系起来，即高斯公式把空间闭区域上的三重积分转化为该闭区域边界曲面上的曲面积分。因此高斯公式与格林公式在本质上是一样的，并且在一定的情况下，高斯公式可转化为格林公式。也就是说，高斯公式是格林公式在三维空间的推广。

在高斯公式中，令空间闭区域V是以xOy面上闭区域D为底，侧面是以L（设D的边界线方程为$L:H(x,y)=C$）为准线，母线平行于z轴的平顶柱体，高为 1。

又令函数$P=P(x,y),Q=Q(x,y),R=0$，且P,Q在D上具有一阶连续偏导数。

设S由S_1,S_2,S_3三部分组成，其中S_3为侧面，S_1,S_2为顶部曲面和底部曲面，则有

$$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\oiint_{S_2}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\oiint_{S_3}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0+0+\oiint_{S_{3前}}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\oiint_{S_{3后}}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$S_{3前}$表示S_3的前半曲面，$S_{3后}$表示S_3的后半曲面。

设从柱面方程$H(x,y)=C$中可解得

$$S_{3前}:\ x=x_1(y),0\leqslant z\leqslant 1,a\leqslant y\leqslant b$$

$$S_{3后}:\ x=x_2(y),0\leqslant z\leqslant 1,a\leqslant y\leqslant b$$

于是
$$\begin{aligned}\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint_{D_{yz}}P(x_1(y),y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{yz}}P(x_2(y),y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_a^b P(x_1(y),y)\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z-\int_a^b P(x_2(y),y)\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z\\&=\int_a^b[P(x_1(y),y)-P(x_2(y),y)]\mathrm{d}y\\&=\oint_L P(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中D_{yz}为$S_{3前}$、$S_{3后}$在yOz平面上的投影，L为正向。

而
$$\iiint_V\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z=\iint_D\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即
$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理可证
$$\oint_L Q(x,y)\mathrm{d}x=-\iint_D\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为格林公式。

4．格林公式与斯托克斯公式的关系

定理 4.1（格林公式） 若函数$P(x,y),Q(x,y)$在闭区域D上连续，且有一阶的连续偏导数，则有

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中L为闭区域D的边界曲线，并取正方向。

定理 4.3（斯托克斯公式） 设光滑曲面S的边界L是按段光滑的连续曲线，若函数P,Q,R在S（连同L）上连续，且有一阶的连续偏导数，则

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

其中S的侧与L的方向按右手法则确定。

格林公式把闭区域上二重积分（特殊的曲面积分）转化为D的边界曲线上的曲线积分。而斯托克斯公式是把一般曲面S上的曲面积分转化为S的边界线上的曲线积分，因此可把斯托克斯公式看作是格林公式在三维空间中另一种形式的推广。在一定情况下，斯托克斯公式也可化为格林公式。

在斯托克斯公式中，令S为xOy面上的闭区域D，边界线为L，由于变量$z=0$，所以$\mathrm{d}z=0$且$\mathrm{d}S$在xOz面、yOz面上的投影$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，于是由斯托克斯公式得

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即格林公式。

4.3.5 四个积分公式的统一形式

作为向量外积和微分运算的推广，我们首先介绍微分的外积和外微分运算的基本知识，然后利用外积、外微分的概念，把牛顿−莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式和斯托克斯公式四个公式统一起来。

1．外积

我们知道向量$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$的外积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}x_3&x_1\\y_3&y_1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+\begin{vmatrix}x_3&x_1\\y_3&y_1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

与向量的外积相类似，我们引入微分的外积运算，对三维空间中自变量的微分

$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$，其外积运算用“$\wedge$”表示，它们满足以下运算法则：

（1）$\alpha(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=(\alpha\mathrm{d}x)\wedge\mathrm{d}y$，$\alpha$ 为实数；

（2）加法分配率：$\mathrm{d}x\wedge(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$；

（3）反交换率：$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$，可以推出 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0$；

（4）结合律：$\mathrm{d}x\wedge(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)=(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}z$；

$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 在几何上可以理解为有向长度微元，$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 在几何上可以理解为有向面积微元，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 在几何上可以理解为有向体积微元。因此，它们与 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的区别在于前者是有向度量，即值有正负之分，而后者是无向的，永远是正的。

2．外微分

我们知道三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分为 $\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$，其一般形式为

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

其中 P,Q,R 是 x,y,z 的函数。

若 $\mathrm{d}u=P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y+R_1\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}v=P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y+R_2\mathrm{d}z$，则 $\mathrm{d}u$ 与 $\mathrm{d}v$ 的外积为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v&=(P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y+R_1\mathrm{d}z)\wedge(P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y+R_2\mathrm{d}z)\\&=\begin{vmatrix}Q_1&R_1\\Q_2&R_2\end{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\begin{vmatrix}R_1&P_1\\R_2&P_2\end{vmatrix}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\begin{vmatrix}P_1&Q_1\\P_2&Q_2\end{vmatrix}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

在三维欧氏空间中，设函数 $f(x,y,z)$ 在空间区域 V 上连续，则可以定义 4 个具有外微分形式的函数：

$\omega_0=f(x,y,z)$ 称为三元 0 阶外微分形式；

$\omega_1=a(x,y,z)\mathrm{d}x+b(x,y,z)\mathrm{d}y+c(x,y,z)\mathrm{d}z$ 称为三元 1 阶外微分形式；

$\omega_2=A(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge dy+B(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+C(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ 称为三元 2 阶外微分形式；

$\omega_3=F(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 称为三元 3 阶外微分形式，

其中，$\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 分别具有 0 阶、1 阶、2 阶、3 阶外微分形式。若再假设空间区域 V 上所涉及的函数皆可微，则可以对上面的各阶微分形式求外微分运算，其定义如下：

0 阶外微分形式 $\omega_0=f(x,y,z)$ 的外微分为

$$\mathrm{d}\omega_0=\mathrm{d}f=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z$$

1 阶外微分形式 $\omega_1=a(x,y,z)\mathrm{d}x+b(x,y,z)\mathrm{d}y+c(x,y,z)\mathrm{d}z$ 的外微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1&=(\mathrm{d}a)\wedge\mathrm{d}x+(\mathrm{d}b)\wedge\mathrm{d}y+(\mathrm{d}c)\wedge\mathrm{d}z\\&=(a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}x+(b_x\mathrm{d}x+b_y\mathrm{d}y+b_z\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}y+(c_x\mathrm{d}x+c_y\mathrm{d}y+c_z\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}z\\&=(b_x-a_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(c_y-b_z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(a_z-c_x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

2 阶外微分形式 $\omega_2 = A(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + B(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + C(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ 的外微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_2 &= (\mathrm{d}A)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + (\mathrm{d}B)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (\mathrm{d}C)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x \\ &= (A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (B_x\mathrm{d}x + B_y\mathrm{d}y + B_z\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \\ &\quad + (C_x\mathrm{d}x + C_y\mathrm{d}y + C_z\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x \\ &= (A_z + B_x + C_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\end{aligned}$$

3 阶外微分形式 $\omega_3 = F(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$ 的外微分为

$$\mathrm{d}\omega_3 = (\mathrm{d}F)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = (F_x dx + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = 0$$

可见，0 阶外微分形式求外微分得 1 阶外微分形式，1 阶外微分形式求外微分得 2 阶外微分形式，2 阶外微分形式求外微分得 3 阶外微分形式，3 阶外微分形式求外微分后为零。

同理可推广到更高维（n 维）的欧氏空间中去，定义 k 阶（$k<n$）外微分形式，每一个 k 阶外微分形式的外微分是下一个（k+1）阶外微分形式，而 n 阶外微分形式的外微分则为 0。

3．用外积、外微分统一四个积分公式

前面学过的积分可分为无定向积分和定向积分，如第一类曲线积分和曲面积分是无定向积分，二重积分和三重积分，若不与其区域边界上的积分相联系，也可以作为无定向积分处理。

对于无定向积分，有向面积微元 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，只考虑大小，不考虑方向；所以 $|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y| = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 重积分也可记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x,y)|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y|$。

另外一种积分，它不仅考虑区域的大小，还考虑区域的方向，称为有定向的积分，如第二类曲线积分，曲面积分就是有定向的积分。凡讨论区域上的积分与其边界上的积分联系时，无论是区域上的积分，还是边界上的积分，都要求是有定向的积分。如格林公式是微积分的基本定理——牛顿−莱布尼茨公式的推广，格林公式揭示了平面区域 D 上积分与其边界 L 上的第二类线积分之间的联系，用外微分形式写为

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D \mathrm{d}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y$$

当边界 L 取逆时针方向时，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，否则 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$。

若用 ω 表示 $(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$，则格林公式可写成 $\int_L \omega = \iint\limits_D \mathrm{d}\omega$。

高斯公式揭示了三重积分与边界曲面上的曲面积分之间的关系，利用这个关系，我们可以通过求三重积分来求曲面积分。

高斯公式用外微分写为

$$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_V \mathrm{d}(P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

当 S 取外法线方向时，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；当 S 取内法线方向时，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；若记 ω 为 $P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，则高斯公式可记为：$\iint_S\omega-\iiint_V\mathrm{d}\omega$。

斯托克斯公式揭示了曲面积分与曲线积分之间的联系，利用这个联系来求曲线积分。

同样，对斯托克斯公式用外微分写为

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S \mathrm{d}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z)=\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x+$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

当边界 L 方向确定时，S 上面积微元的方向也随之而定，根据右手定则，曲面 S 的法向量取法也随之而定。

若用 ω 表示 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，公式可记为 $\int_L\omega=\iint_S\mathrm{d}\omega$。

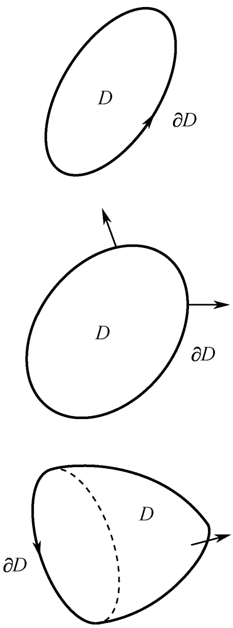
四个基本公式可利用微分形式和它的外微分做统一的处理。

牛顿−莱布尼茨公式 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 中，令 $I=[a,b],\int_{\partial I}F=F(b)-F(a)$，则以上公式可写做 $\int_{\partial I}F=\int_I\mathrm{d}F$。

在格林公式 $\iint_D(-Py+Qx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$（$\partial D$ 表示 D 的边界，取正向）中，如果取 1 阶外微形开式 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 及外微分 $\mathrm{d}\omega=(Px\mathrm{d}x+Py\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x+(Qx\mathrm{d}x+$

$Qy\mathrm{d}y)\wedge \mathrm{d}y=(-Py+Qx)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$ 就可以写成 $\int_D \mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega$ 。

在高斯公式 $\iint\limits_D (Px+Qy+Rz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial D} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中，如果取 2 阶外微分形式 $\omega=P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$ 及外微分 $\mathrm{d}\omega=(Px+Qy+Rz)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z$ ，就可以写成 $\int_D \mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega$ 。



在斯托克斯公式中

$$\iint\limits_D \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\int_{\partial D} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

如果我们取 I 阶外微分开式 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 及其外微分

$$\mathrm{d}\omega=(\mathrm{d}P)\wedge \mathrm{d}x+(\mathrm{d}Q)\wedge \mathrm{d}y+(\mathrm{d}R)\wedge \mathrm{d}z=\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

就可以写为 $\int_D \mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega$ 。

因此，牛顿–莱布尼茨公式，格林公式、高斯公式和斯托克斯公式可用一个公式 $\int_{2D}\omega=\int_D d\omega$ 表示，式中 D 为 $\mathrm{d}\omega$ 的积分域，∂D 为 D 的边界。如图 4.12 所示。

图 4.12

4.4　积分关系定理的应用

4.4.1　格林公式的应用

1．求平面图形的面积

在格林公 $\iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 中令 $Q=x, P=-y$，则 L 所围的面积为

$$A=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

当利用二重积分计算 D 的面积较繁时，可以利用上述公式，用曲线积分来计算。

例 4.1　计算椭园 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$（见图 4.13）的面积。

解法一　利用二重积分计算。

$$A=\iint \mathrm{d}\sigma = 4\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x(令 x=a\sin t)$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{a}a^2\cos^2 t\mathrm{d}t=\pi ab$$

解法二

设椭圆参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$，则

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\pi ab$$

例 4.2　计算抛物线 $(x+y)^2=ax\ (a>0)$ 与 x 轴所围区域的面积（见图 4.14）。

解

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{ONA}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{AMO}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{AMO}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^0\left[x\left(\sqrt{ax}-x\right)'-\left(\sqrt{ax}-x\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}a^2$$

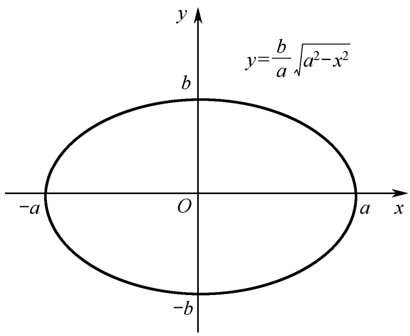


图 4.13

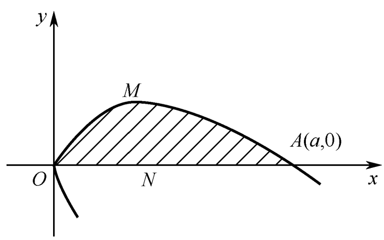


图 4.14

反之，当平面图形面积较容易求出时，公式 $A=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 可反向使用。

例 4.3 设 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 取正向，求 $\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 。

解法一 取 L 的参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$,则

$$I=\int_0^{2\pi}[a\cos t\cdot a\cos t-a\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}a^2\mathrm{d}t=2\pi a^2$$

解法二 $I=2\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=2\pi a^2$

2．求闭合回路的平面曲线的第二类曲线积分

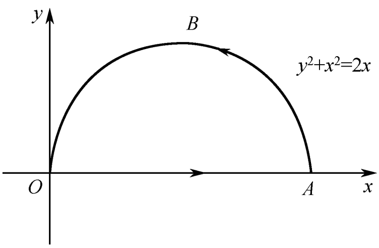


图 4.15

当 $P(x,y),Q(x,y)$ 比较复杂，而 $\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 比较简单时，可通过 $\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 将曲线积分化为二重积分计算。

例 4.4 计算 $I=\oint_L(\mathrm{e}^x\sin y-xy)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+2)\mathrm{d}y$ 其中，L 为曲线 $x^2+y^2=2x$ 上半部与 x 轴所围闭路的正向，如图 4.15 所示。

解法一

$$I=\int_{\overline{OA}}(\mathrm{e}^x\sin y-xy)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+2)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{ABO}}(\mathrm{e}^x\sin y-xy)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+2)\mathrm{d}y$$

下面的步骤省略，但至此我们已看出由于 P（x,y），$Q(x,y)$与积分路径的复杂，继续下去会花费大量的时间和精力，但是由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=x$ 相当简单，因此，利用上述方法可以化难为易，简化运算。

解法二 $I=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$(选极坐标系$r$=2cos$\theta$)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\cos\theta\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$$

例 4.5 计算 $I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, L 为任一不包含原点的闭区域的边界线，如图 4.16 所示。

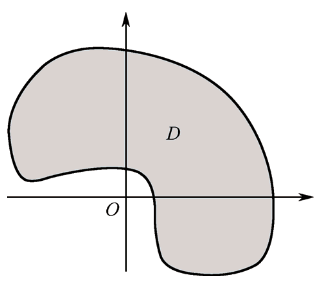


图 4.16

解 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在如图所示的区域 D 上连续且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

由格林公式得

$$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

3．求非闭合回路的平面曲线的第二类曲线积分

在计算非闭合回路的曲线积分时，若所求的曲线积分中的 $P(x,y),Q(x,y)$或曲线 L 比较复杂，仅因积分路径非闭合而无法利用格林公式，这时可以添加较简单的曲线（如直线，圆弧等）与 L 组成闭合回路，再利用格林公式计算。

例 4.6　计算 $I=\int_L \frac{y^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]\mathrm{d}y$

其中 L 沿上半圆周 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 从点 A（$-R$，0）到点 B（R，0）。

解　添加有向直线 $\overrightarrow{BA}$，如图 4.17 所示，由格林公式（注意曲线的方向）得

$$\begin{aligned}I+I_1&=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D[4+\frac{y}{\sqrt{R^2+x^2}}-\frac{2y}{\sqrt{R^2+x^2}}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\cdot\frac{1}{2}\pi=-2\pi\end{aligned}$$

由于在 x 轴上有 y=0, dy=0,所以 $I_1=\int_{BA}\frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}\mathrm{d}x+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]\mathrm{d}y=0$

故 $I=-2\pi$ 。

4．求复连通区域内的平面曲线的第二类曲线积分

如图 4.18 所示，若 $P(x,y),Q(x,y)$在以曲线 C 与 L 为边界的复连通区域内有连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则由格林公式有 $\oint_{C+L^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$，从而 $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，这样就可将较为复杂的积分路径 C 化为较简单的积分路径 L，从而简化运算。

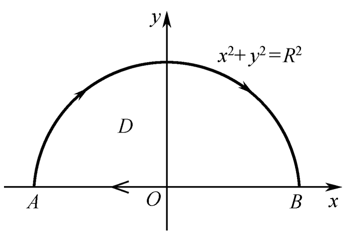


图 4.17

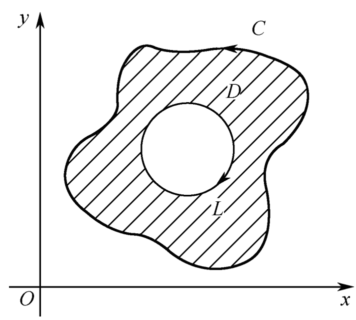


图 4.18

例 4.7 计算$I=\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中$C$为到原点的距离均大于$a(a>0)$任意平面曲线，方向为正向，如图 4.19 所示。

解 因为（0，0）使得P、Q无意义，故以原点为圆点，以R（$<a$）为半径作圆L，其参数方程为$\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\end{cases}$。

在由C与L为边界的复连通区域内有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$且连续，所以由上述公式得

$$\begin{aligned}I&=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi\end{aligned}$$

例 4.8 计算$I=\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{x^2+y^2}+2x\right)\mathrm{d}y$，其中$C$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，方向为正向。

解 因为（0，0）使得P、Q无意义，故以原点为圆心，以R为半径作圆L，其参数方程为$\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\end{cases}$。

在由C与L为边界的复连通区域内有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$且连续，所以由上例得

$$I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\oint_C 2x\mathrm{d}y=2\pi+\int_0^{2\pi}2\cdot a\cos\theta\cdot b\cos\theta\mathrm{d}\theta=2\pi+ab\left(-\frac{2\pi}{2}\right)=2\pi-\pi ab$$

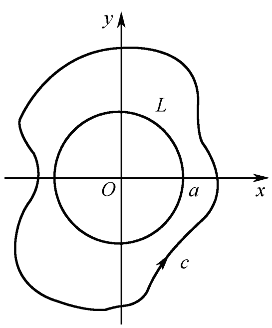


图 4.19

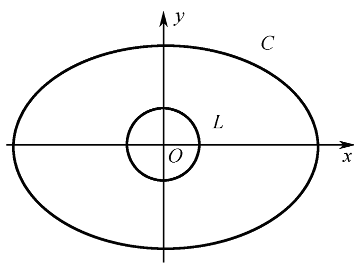


图 4.20

例 4.9 计算曲线积分$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{2x^2+6y^2}$，其中$L$为任意包围原点的闭曲线。

解 因为原点使得P,Q无意义，积分曲线又具有任意性，所以积分无法直接计算。根据被积函数的特点，我们用椭圆$l:\begin{cases}x=\sqrt{6}\varepsilon\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\varepsilon\sin\theta\end{cases}$，（$\varepsilon$为充分小的正数，可使

椭圆被完全包围在闭曲线 L 内）将原点扣掉，椭圆取顺时针方向。

令 $P=\dfrac{-y}{2x^2+6y^2},Q=\dfrac{x}{2x^2+6y^2}$，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2-3y^2}{(x^2+3y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 成立，所以根据格林公式有

$$\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{2x^2+6y^2}+\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{2x^2+6y^2}==\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

所以

$$\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{2x^2+6y^2}=\int_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{2x^2+6y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{12}\varepsilon^2\cos^2\theta+\sqrt{12}\varepsilon^2\sin^2\theta}{12\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{12}}$$

4.4.2　高斯公式的应用

1．求空间立体的体积

在高斯公式中，令 $P=x,Q=y,R=z$，则

$$\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V$$

从而闭曲面 S 所围成的空间区域 V 的体积为

$$V=\frac{1}{3}\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或　$V=\dfrac{1}{3}\displaystyle\oiint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}s$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 S 的外法线方向的方向余弦。

例 4.10　求球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 的体积。

解　球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$,则

$$\oiint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi R^3$$

同样有
$$\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi R^3$$

故球体积为
$$V=\frac{1}{3}\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi R^3$$

2．求封闭曲面上的第二类曲面积分

第二类曲面积分的计算是比较复杂的，但当涉及到的曲面是封闭曲面时，我们可以利用高斯公式将封闭曲面上的第二类曲面积分化为三重积分，可简化计算，需要注意的是被积函数是否有一阶连续偏导数以及曲面的方向。

例 4.11　计算曲面积分

$$I=\iint_S(x^2-2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-2x+1)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 为球心在原点，半径为 a 的球面外侧。

解 S 为封闭曲面，且

$$P = x^2 - 2xy, Q = y^2 - 2yz, R = (z - 2x + 1)z$$

在 S 所包围的区域内有一阶连续偏导数。应用高斯公式，得到

$$I = \iiint_a (2x - 2y + 2y - 2z + 2z - 2x + 1)\mathrm{d}V = \iiint_a 1\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

例 4.12 求第二类曲面积分 $\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，其外法线方向与 x 轴的夹角为钝角。

解 由于 S 的外法线方向与 x 轴的夹角为钝角，故知取 S 的内侧。而

$$\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oiint_{S^-} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在 S^- 上可以应用高斯公式，有

$$P = x, Q = \cos y, R = 1$$

$$\begin{aligned}\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\oiint_{S^-} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iiint_V (1 - \sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_V \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由于 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ 关于 $y = 0$ 对称，$\sin y$ 为奇函数，所以

$$\iiint_V \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

故

$$\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{4}{3}\pi$$

3．求非封闭曲面上的第二类曲面积分

对于非封闭曲面上的第二类曲面积分，有时也可利用高斯公式来计算，需要添加辅助曲面（平面），使之与原曲面一起构成封闭曲面，然后再用高斯公式。

例 4.13 计算 $J = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被 $z = 0$, $z = 3$ 截的部分的外侧。

解 为利用高斯公式，我们分别补充圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $z = 0, z = 3$ 的交平面 $S_{1下}$，$S_{2上}$，其中 $S_{1下}$：$z = 0, x^2 + y^2 \leqslant 1$，$S_{2上}$：$z = 3, x^2 + y^2 \leqslant 1$，这样 S 与 $S_{1下}$，$S_{2上}$ 一起构成封闭曲面。

$$\begin{aligned}J &= \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \oiint_{S+S_{1下}+S_{2上}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{S_{1下}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \\ &\quad \iint_{S_{2上}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由高斯公式得

$$\oiint\limits_{S+S_{1下}+S_{2上}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=9\pi$$

而 $S_{1下}$，$S_{2上}$垂直于 xOz 平面和 yOz 平面，所以

$$\iint\limits_{S_{1下}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\iint\limits_{S_{2上}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi$$

故 $J=9\pi-3\pi=6\pi$ 。

4．求存在奇点的封闭曲面上的第二类曲面积分

当在封闭曲面内有奇点（即被积函数不连续或偏导数不存在），我们要利用高斯公式来计算，一般会用小圆或小椭圆来挖掉这个奇点，从而使这个小圆或小椭圆和原来的曲面共同构成一个封闭的复连通区域，则在这个复连通区域内可以利用高斯公式，是小圆或小椭圆要根据所给的被积函数的形式来确定。

例 4.14　计算曲面积分 $I=\iint\limits_S y\ln r\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\ln r\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧，如图 4.21 所示。

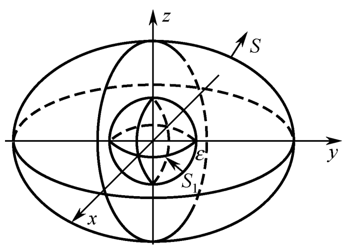


图 4.21

解　由于曲面比较复杂，直接计算第二类曲面积分相当困难。要想用高斯公式，在 $\tau=0$ 处 P、Q 间断，不满足高斯公式的条件，需要挖掉奇点，即以原点为球心作半径为 ε 的球面 S_1，取 ε 充分小使 S_1 完全在椭球内部（见图 4.21）。设 S_1 与 S 之间所夹的部分为 Ω，在区域 Ω 上可以应用高斯公式，这时作为区域 Ω 的内边界的 S_1，其法向量应指向球心。

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S+S_1} y\ln r\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\ln r\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial(y\ln r)}{\partial x}+\frac{\partial(-x\ln r)}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\\
&=\iiint\limits_\Omega\left(y\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-x\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+1\right)\mathrm{d}V\\
&=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r}-\frac{x}{r}\cdot\frac{y}{r}+1\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_\Omega 1\mathrm{d}V=\frac{4}{3}\pi abc-\frac{4}{3}\pi\mathrm{e}^3
\end{aligned}$$

这里，最后一步是用体积公式得出的，Ω 的体积是椭球体积减去小球体积。然后再计算小球面 S_1 上的积分，我们注意到在小球面上 $r=\varepsilon$ 为常数，另设法向量指向球外

的小球面为 S_1^+， S_1 与 S_1^+ 仅法向量反向， S_1^+ 所包围的小球体为 Ω_1。

$$\iint_{S_1} y\ln\tau\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\ln\tau\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1} y\ln\varepsilon\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\ln\varepsilon\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{s_1^+} y\ln\varepsilon\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\ln\varepsilon\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iiint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial(y\ln\varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(-x\ln\varepsilon)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = -\iiint_{\Omega_1} 1\mathrm{d}V = -\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$$

$$I = \iint_{B+B_1} - \iint_{S_1} = \frac{4}{3}\pi abc - \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 - \left(-\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\right) = \frac{4}{3}\pi abc$$

例 4.15 求 $I = \oiint_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，取外侧。

解 如果在Σ上直接计算曲面积分较复杂，点（x,y,z）$\in\Sigma$（Σ为椭球面），而被积函数表达式的分母为 $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$ 。

若椭球面Σ围成的区域记为 Ω，它含原点（0，0，0），而 P，Q，R 在点（0，0，0）处无定义，因而不能在 Ω 上直接应用高斯公式，如果我们作以原点为球心，$\varepsilon(\varepsilon>0)$ 为半径的小球面Σ_ε，且Σ_ε位于 Ω 内，在Σ与Σ_ε所围的区域 Ω 上就可以应用高斯公式，将把求Σ上的曲面积分转化为求Σ_ε上的曲面积分。

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oiint_{\Sigma_\varepsilon} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 P，Q，$R\in C^{\mathrm{b}}(\Omega_\varepsilon)$，且 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$， 于是

$$I = \oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_\varepsilon} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_0} 3\mathrm{d}V = \frac{3}{\varepsilon^3}\frac{4\pi}{3}\varepsilon^3 = 4\pi$$

其中， Ω_0 是Σ_ε所围成的小球体。

小结 （1）在本例中Σ是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 。实际上，Σ只要是包含原点的任意分片光滑曲面，都可以采取本例的解法。

（2）当被积函数的分母为 $x^2+y^2+z^2$ 时，可以作 ε 为半径的小球面；若分母为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 时可以作小椭球面。

4.4.3　斯托克斯公式的应用

1．求分段光滑的空间闭曲线的第二类曲线积分

例 4.16　计算$\oint_{\Gamma} z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$,其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则（见图 4.22）

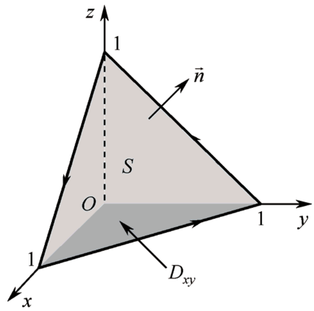


图 4.22

解　根据斯托克斯公式有

$$\oint_{\Gamma} z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 S 的法向量的三个方向余弦都为正，再由对称性知

$$\oint_{\Gamma} z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}\sigma = \frac{3}{2}$$

例 4.17　计算曲线积分 $I = \oint_{\Gamma}(y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 截立体：$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面所截得的截痕，若从 Ox 轴正向看去，取逆时针方向（见图 4.23）

解　$\sum$: $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的上侧被 Γ 所围的部分，Σ 的单位法向量 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，即 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，由斯托克斯公式，有

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S = -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$$

在Σ上有 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$，如图 4.24 所示。

$$I = -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S = -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\frac{3}{2}\mathrm{d}S = -2\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$= -2\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}\mathrm{d}\sigma = -6 = -\frac{9}{2}$$

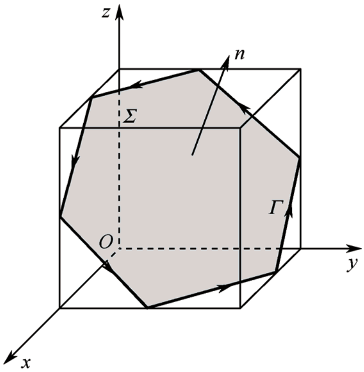


图 4.23

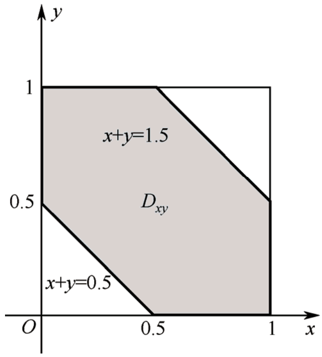


图 4.24

2．求光滑的空间闭曲线的第二类曲线积分

例 4.18 计算曲线积分 $I=\oint_{\Gamma}-y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是平面 $y+z=2$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线，若从 z 轴正向看去，Γ 取逆时针方向（见图 4.25）

解 $P=-y^2,Q=x,R=z^2$，Σ为 $y+z=2$ 的上侧被 Γ 所围的部分，$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$。

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y^2 & x & z^2\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}(1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{Dxy}(1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1+2\sin\theta)r\mathrm{d}r=\pi$$

例 4.19 计算 $\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,其中 Γ 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0,\end{cases}$ 若从 x 轴正向看去，这圆周是取逆时针的方向（见图 4.26）。

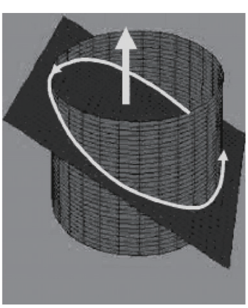


图 4.25

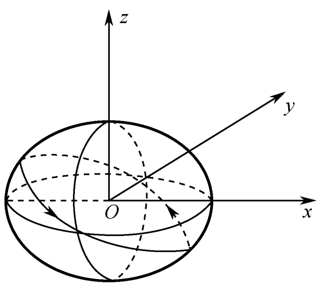


图 4.26

解 取 Γ 上所张的曲面 S 为 Γ 围成的平面圆，由于从 x 轴看去，Γ 是逆时针方

向，且符合右手规则，则 S 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$,根据斯托克斯公式得

$$\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\iint_S\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2$$

4.5 积分关系定理的推广

4.5.1 格林公式的推广

1．将函数 $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y}$ 在 D 上连续推广为：$\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y}$ 在 D 上黎曼可积

因为格林公式是牛顿−莱布尼茨公式在二元情况下的推广，在牛顿−莱布尼茨公式 $\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$ 中，只需要求 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。如果只要求 $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y}$ 在 D 上可积，能否有格林公式成立呢？下面的定理给出了肯定答案。

推广 4.1 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且 $\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上可积，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中 L 为闭区域 D 的边界曲线，并取正方向。

证明 先假设穿过区域 D 内部且平行于坐标轴的直线和 L 至多交于两点，即区域 D 既是 X 型区域又是 Y 型区域（图 4.27）。

$$D=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$$

$$D=\{(x,y)\,|\,\psi_1(y)\leqslant y\leqslant\psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$$

这里 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$ 分别为曲线 $\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{AEB}$ 的方程，而 $x=\psi_1(y)$ 和 $x=\psi_2(y)$ 则分别为曲线 $\overset{\frown}{CAE}$ 和 $\overset{\frown}{CBE}$ 的方程。

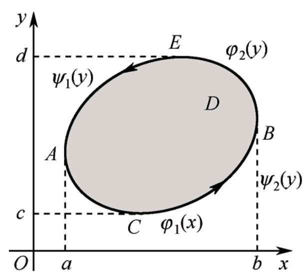


图 4.27

由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}$，$\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上黎曼可积，从而勒贝格可积，由

富比尼定理可得

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y=\int_a^b P(x,\varphi_2(x))\mathrm{d}x-\int_a^b P(x,\varphi_1(x))\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\overset{\frown}{AEB}}P(x,y)\mathrm{d}x-\int_{\overset{\frown}{ACB}}P(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{\overset{\frown}{BEA}}P(x,y)\mathrm{d}x-\int_{\overset{\frown}{ACB}}P(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=-\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x$$

同理可以证得 $\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L Q(x,y)\mathrm{d}y$。

将上述两个结果相减即得 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$。

当 D 是一般情形时的证明和普通的数学分析教科书的证明相同，略。

2．将函数 $\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上可积推广为：右偏导数 $\frac{\partial_+ Q}{\partial x},\frac{\partial_+ P}{\partial y}$（或左偏导数）在 D 上黎曼可积

推广 4.2 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，右偏导数 $\frac{\partial_+ Q}{\partial x},\frac{\partial_+ P}{\partial y}$ 在 D 上黎曼可积，则有

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial_+ Q}{\partial x}-\frac{\partial_+ P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中 L 为闭区域 D 的边界曲线，并取正方向。

证明 与推广 4.1 的证明相同，要用到富比尼定理和本章参考文献[12]中第 75 页命题 6 的结论。略。

3．将平面闭区域 D 的边界 L 推广为：有限条、无穷可数条光滑曲线或按段光滑曲线

推广 4.3 （1）设平面闭区域 D 的边界是由有限条光滑曲线或按段光滑曲线所组成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且有一阶连续偏导数，则有

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中 L 为闭区域 D 的边界曲线，并取正方向；

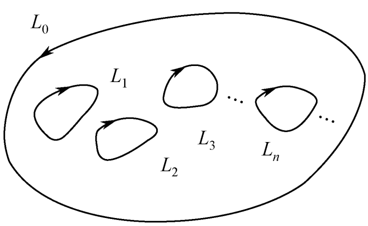


图 4.28 平面闭区域 D

（2）设平面闭区域 D 是由无穷可数条光滑曲线或按段光滑曲线所围成（见图 4.28），即 D 的边界曲线 L 由 $L_0,L_1,L_2,\cdots,L_n,\cdots$ 构成，其中，$L_n=(n=0,1,2,\cdots)$ 按段光滑，L_n 与 L_0 的距离 $\rho(L_n,L_0)\to 0(n\to\infty)$，$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上连续，且有连续一阶偏导数，则 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ (L 取正方向)。

证明　见本章参考文献[9]。

4．将充分条件的格林公式推广为：充要条件的格林公式

推广 4.4　设函数 P（x,y）,$Q(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，$\dfrac{\partial P}{\partial v},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上（L）可积，$F\subset D$ 为 D 内任一区域。L 为 F 的边界曲线，且取正方向。D 的边界和 F 的边界 L 均由有限条分段连续可微（按段光滑）曲线组成。

则 $\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 成立的充分必要条件是 P，Q 分别为 D 上关于 y 和关于 x 的绝对连续函数。

证明　见本章参考文献[10]。

4.5.2　高斯公式的推广

1．将函数 P,Q,R 在 V 上有一阶的连续偏导数推广为：$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 在 V 内除有限个点外连续

推广 4.5　设空间闭区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成，若函数 P,Q,R 在 V 上连续，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 在 V 上连续、在 V 内除有限个点外连续，则

$$\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oint\!\!\!\!\oint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{⑧}$$

其中 S 取外侧。

证明　首先看一个引理：

设 S 是一分片光滑的曲面，函数 P,Q,R 在 S 上连续，则有不等式

$$\left|\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant M\sigma$$

其中 $M=\max\limits_{(x,y,z)\in S}\left|\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\right|$，$\sigma$ 为曲面 S 的面积。

（证明略。参见参考文献：颜振标，黄敏．高斯公式的一个推广．琼州学院学报，2008，4．）

下面证明该推广：

设 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 在 V 内有有限个奇点 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，对于点 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$，以 A_i 为中心，充分小的 $\varepsilon_i>0$ 为半径，作小球面 S_i，使 S_i 包含于 V 内，并且使各小球之间互不相交也互不包含，　S_i 所围的闭区域记作 V_i。

这样，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 在 $V-(V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m)$ 上连续，记 $S'=S-S_1-S_2-\cdots-S_m$，应用高斯公式，则有

$$\oiint_{S'} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{V-(V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_M)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iiint_{V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_M} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

于是

$$\oiint_{S} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iiint_{V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_M} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{S_1+S_2+\cdots+S_m} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad ⑨$$

因为 P,Q,R 在 S_i 上连续，由引理，有

$$\left|\iint_{S_i} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant M_i \cdot 4\pi\varepsilon_i^2$$

其中 $M_i = \max\limits_{(x,y,z)\in S_i}\left|\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\right| \ (i=1,2,\cdots,m)$ 。

所以

$$\left|\iint_{S_1+S_2+\cdots+S_m} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left|\iint_{S_1+S_2+\cdots+S_m} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant 4\pi(M_1\varepsilon_1^2 + M_2\varepsilon_2^2 + \cdots + M_m\varepsilon_m^2)$$

因为 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 在 V 上连续，所以在 V 上有界，设 $\left|\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right| \leqslant M$ （M 为常数），在 V_i 上则有

$$\left|\iiint_{V_i}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| \leqslant \iiint_{V_i}\left|\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| \leqslant M\iiint_{V_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4}{3}M\pi\varepsilon_i^3$$

于是

$$\left|\iiint_{V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_M}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| = \left|\sum_{i=1}^{m}\iiint_{V_i}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\frac{4}{3}M\pi\varepsilon_i^3 = \frac{4}{3}M\pi\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^3$$

由 S_i 的任意性，令 $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m\} \to 0$，则 $\frac{4}{3}M\pi\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_i^3 \to 0$ 。从而

$$\iiint_{V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_M}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to 0,$$

$$\iint_{S_1+S_2+\cdots+S_m} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \to 0$$

在⑨式两边取极限，令 $\varepsilon \to 0$ 便得到

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2．将函数 P,Q,R 在 V 上有一阶的连续偏导数推广为：$\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ 在 V 上黎曼可积

推广 4.6　设空间闭区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成，若函数 P,Q,R 在 V 上连续，$\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ 在 V 上黎曼可积，则

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{⑩}$$

其中 S 取外侧。

证明　证明与格林公式的推广的证明类似，略。

3．将 $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ 在 V 上黎曼可积推广为：右偏导数 $\frac{\partial_+ Q}{\partial x},\frac{\partial_+ P}{\partial y},\frac{\partial_+ Q}{\partial z}$（或左偏导数）在 V 上黎曼可积

推广 4.7　设空间闭区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成，若函数 P,Q,R 在 V 上连续，$\frac{\partial_+ Q}{\partial x},\frac{\partial_+ P}{\partial y},\frac{\partial_+ Q}{\partial z}$ 在 V 上黎曼可积，则

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial_+ P}{\partial x}+\frac{\partial_+ Q}{\partial y}+\frac{\partial_+ R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{⑪}$$

其中 S 取外侧。

证明　参见参考文献：李日光，等．非光滑函数的格林公式、高斯公式和斯托克斯公式．广西师范学院学报：自然科学版，2003，(9)．

4.5.3　斯托克斯公式的推广

1．将函数 P,Q,R 的一阶偏导数连续推广为：一阶偏导数黎曼可积

推广 4.8　设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线，若函数 P,Q,R 在 S（连同 L）上可微，一阶偏导数在 S（连同 L）上黎曼可积，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{①}$$

其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定。

证明参见文献：李日光，等．非光滑函数的格林公式、高斯公式和斯托克斯公式．广西师范学院学报：自然科学版，2003，(9)．

2．将 P,Q,R 的一阶偏导数黎曼可积推广为：一阶右偏导数（或左偏导数）黎曼可积

推广 4.9　设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线，若函数 P,Q,R 在 S

（连同L）上可微，一阶右偏导数在S（连同L）上黎曼可积，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\frac{\partial_+ R}{\partial y}-\frac{\partial_+ Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial_+ P}{\partial z}-\frac{\partial_+ R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial_+ Q}{\partial x}-\frac{\partial_+ P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad ②$$

其中S的侧与L的方向按右手法则确定。

证明 参见参考文献：李日光，等．非光滑函数的格林公式、高斯公式和斯托克斯公式．广西师范学院学报：自然科学版，2003，（9）．

参 考 文 献

［1］张盈．微积分中几类积分之间的联系．吉林省教育学院学报，2012，（11）．

［2］陆晓朋．Green 公式破译．数学学习：高等数学季刊，1998，1．

［3］陈宁．关于格林公式，高斯公式和斯托克斯公式的历史注记．高等数学研究，2000，（1）．

［4］刘金华．格林公式实用价值初探．中州大学学报:综合版，1995，（3）．

［5］冀利英．浅谈格林公式的巧妙使用．赤峰学院学报:自然科学版，2011，（7）．

［6］显增福，邢小宁．关于格林公式的两点注记．郧阳师范高等专科学校学报，2008，（12）．

［7］赵彦晖．从变力沿平面曲线做功看格林公式．高等数学研究，2004，（2）．

［8］包海臣．“格林公式”的物理原型及其它．职大学报，2005，（2）．

［9］刘文军，孟京华，柯林．Green 公式的一个推广．高师理科学刊，2011，（7）．

［10］李日光，等．非光滑函数的格林公式．广西师范学院学报:自然科学版，2006，（3）．

［11］李日光，等．非光滑函数的格林公式、高斯公式和斯托克斯公式．广西师范学院学报:自然科学版，2003，（9）．

［12］方初宝．数学分析选讲．南宁：广西人民出版社，1986．

［13］邹国源．Gauss 公式的几种形式．数学学习:高等数学季刊，1998，（1）．

［14］颜振标，黄敏．高斯公式的一个推广．琼州学院学报，2008，（4）．

［15］徐际宏．Остроградский—Gauss 定理的的一个注记．安徽师大学报，1994，（9）．

［16］朱根林．高斯公式在第二类曲面积分计算中的应用．彭城职业大学学报，2002，（4）．

［17］郭运瑞，等．正确使用高斯公式计算曲面积分．河南科技学院学报:自然科学版，2005，（12）．

［18］白岩，等．应用 Gauss 公式重点、难点解析．长春师范学院学报:自然科学版，2006，（10）．

［19］邢抱花．关于斯托克斯公式的几点补充．安庆师范学院学报:自然科学版，2012，（11）．

［20］曹吉利．斯托克斯定理的一种证法．陕西工学院学报，2000，（6）．

［21］韩涛．斯托克斯公式与流场．工科数学，1991，（9）．

［22］孟庆贤．谈谈斯托克斯定理．承德民族师专学报，1995，（2）．

［23］庞惠君．利用外积、外微分统一微积分中四大公式的教学探讨．江西农业大学学报，1995，（3）．

［24］李娴娴，李傅山．几个积分公式的注释及其应用．曲阜师范大学学报，2007，（4）．

［25］敬石心，沙萍．关于几种积分关系的讨论．长春大学学报，2001，（6）．

［26］刘明超．四个积分学公式关系浅析．高等函授学报:自然科学版，2011，（2）．

第 5 章　极限关系定理

数列极限与函数极限的关系定理——海涅定理（归结原则），是沟通数列极限与函数极限的桥梁，它揭示了变量变化的整体与部分，连续与离散之间的联系，在极限理论和应用中，占有非常重要的地位。在数学分析中有着重要的理论意义和作用。

5.1　海涅定理的历史演变

从表面上看，数列极限与函数极限是不同的两类极限，前者的变量离散地变化，后者的变量连续地变化。人们在对数列极限与函数极限的概念有了一定认识以后，基于下列两种因素，开始探讨数列极限与函数极限的关系问题，一是数列作为定义域为全体自然数集合的一类函数，存在着特殊性与普遍性的关系，因此数列极限与函数极限之间存在着相应的关系；二是不论变量是离散地变化还是连续地变化，只要它们的变化趋势相同，从极限的意义上来讲，效果是一样的，因此数列极限与函数极限之间存在着一定的关系。

数列极限与函数极限的关系定理是由德国数学家海涅（E.Heine，1821－1881）给出的，所以称为海涅定理，应用海涅定理可把函数的极限问题转化（归结）成数列问题，因而人们又称它为归结原则。

5.2　海涅定理的内容与证明

海涅定理是数列极限与函数极限之间的关系定理，根据自变量 x 的各种变化趋势（$x\to x_0, x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$）以及函数 $f(x)$ 的各种变化趋势，可以写出海涅定理的各种形式，这些形式在结构上是类似的，在证明方法上也是类似的，可以利用类比的方法掌握。

定理 5.1　设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

证明　不妨设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)=\mathring{U}(x_0,\ \delta')$ 内有定义。

必要性：即由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$（$x_n\neq x_0$），推出 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

一方面，由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$（可取 $\delta\leqslant\delta'$），使得当 $0<|x-x_0|<\delta$

时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

另一方面，对任何以x_0为极限且含于$\mathring{U}(x_0)=\mathring{U}(x_0,\delta')$的数列$\{x_n\}$来说，对上述的$\delta>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且$x_n\neq x_0$知，$\exists N$，当$n>N$时，有$0<|x_n-x_0|<\delta$，从而有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$。

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

充分性：即由对任何以x_0为极限且含于$\mathring{U}(x_0)$的数列$\{x_n\}$都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，推出$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

反证之，假设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$，则$\exists\varepsilon_0>0$，对任何$\delta>0$，总存在相应的一点$x$，尽管$0<|x-x_0|<\delta$，但有$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$。

当依次取$\delta=\delta'$，$\dfrac{\delta'}{2},\cdots,\dfrac{\delta'}{n},\cdots$时，得到相应的点$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$，$\cdots$，使得$0<|x_n-x_0|<\dfrac{\delta'}{n}$，而$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$（$n=1$，$2$，$3$，$\cdots$）。

显然该数列在$\mathring{U}(x_0)=\mathring{U}(x_0,\delta')$内，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$x_n\neq x_0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$，这与已知矛盾，故得证。

几点分析：（1）掌握海涅定理的证明，不但能加深对定理本身的认识，而且由于它的证明运用了极限的定义及其反命题，论证方法具有典型性，因此，可以从中学习到极限问题的一种典型论证方法。

（2）在海涅定理的必要性证明中，用到了两个基本概念（数列极限的精确定义、函数极限的精确定义）和两个条件：

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，② $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且$x_n\neq x_0$。

先利用条件①，由正数ε确定正数δ，再利用条件②由正数δ确定正整数N，从而由正数ε确定正整数N，使得当$n>N$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，这是必要性证明中的关键所在。

（3）关于海涅定理的充分性，要直接证明结论是比较困难的，因为在已知条件下，以x_0为极限且含于$\mathring{U}(x_0)$的数列$\{x_n\}$有无穷多个，但它的反面却只有一个，因此自然应想到应用反证法。

假设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$不成立，根据函数极限定义的反命题进行推理，我们只要能够构造出一个$\{x_n\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且$x_n\neq x_0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$不成立，就与充分性的已知条件矛盾，从而充分性得到证明，构造出一个以x_0为极限且含于$\mathring{U}(x_0)$的数列$\{x_n\}$，是充分性证明中的关键所在。

我们还可以给出定理 5.1 的等价形式：

定理 5.2　设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 点收敛的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$，数列 $\{f(x_n)\}$ 都收敛。

证明　只需证明，若对任意数列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$，都有数列 $\{f(x_n)\}$ 都收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛到同一个极限。

不妨设两个任意数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足：

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$；

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = b$。

显然数列 $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$ 收敛于 x_0，于是，由已知得数列 $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \cdots, f(x_n), f(y_n), \cdots$ 收敛，由于它的奇、偶两个子列分别收敛于 a、b，故应有 $a = b$。

定理 5.3　设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_+(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}_+(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

证明　不妨设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta')$ 内有定义

必要性：由 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$（可取 $\delta \leqslant \delta'$），使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$；又对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}_+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta')$ 的数列 $\{x_n\}$ 来说，对上述的 $\delta > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$ 知，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有 $0 < x_n - x_0 < \delta$，从而有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$。这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

充分性：反证之，假设 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq A$，则 $\exists \varepsilon_0 > 0$，对任何 $\delta > 0$，总存在相应的一点 x，尽管 $0 < x - x_0 < \delta$，但有 $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$；当依次取 $\delta = \delta'$，$\dfrac{\delta'}{2}$，…，$\dfrac{\delta'}{n}$，…时，得到相应的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，使得 $0 < x_n - x_0 < \dfrac{\delta'}{n}$，而 $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）。显然该数列在 $\mathring{U}_+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta')$ 内，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，$x_n \neq x_0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$，与已知矛盾，故得证。

定理 5.4　设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_-(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}_-(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

证明　不妨设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_-(x_0) = (x_0 - \delta', x_0)$ 内有定义

必要性：由 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$（可取 $\delta \leqslant \delta'$），使得当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$；又对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}_-(x_0) = (x_0 - \delta', x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$ 来说，对上述的 $\delta > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$ 知，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有 $-\delta < x_n -$

$x_0<0$，从而有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

充分性：反证之，假设$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq A$，则$\exists\varepsilon_0>0$，对任何$\delta>0$，总存在相应的一点$x$，尽管$-\delta<x-x_0<0$，但有$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$；当依次取$\delta=\delta',\dfrac{\delta'}{2},\cdots,\dfrac{\delta'}{n},\cdots$时，得到相应的点$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，使得$-\dfrac{\delta'}{n}<x_n-x_0<0$，而$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$（$n=1,2,3,\cdots$）。显然该数列在$\mathring{U}_-(x_0)=(x_0-\delta',x_0)$内，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$x_n\neq x_0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$，与已知矛盾，故得证。

定理 5.5 设函数$f(x)$在$U(\infty)$内有定义，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充要条件是：对任何趋近于$\infty$且含于$U(\infty)$的数列$\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

证明 不妨设$f(x)$在$U(\infty)=(-\infty,-M_0)\cup(M_0,+\infty)$内有定义，$M_0>0$。

必要性：由$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$（可使$M\geqslant M_0$），使得当$|x|>M$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$；又由于$x_n\in U(\infty)=(-\infty,-M_0)\cup(M_0,+\infty)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，对上述的$M>0$，存在相应的自然数$N$，使得当$n>N$时，有$|x_n|>M$，从而有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

充分性：反证之，假设$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq A$，则$\exists\varepsilon_0>0$，对任何$M>0$，总存在相应的一点$x$，尽管$|x|>M$，但有$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$；当依次取$M=M_0+1,M_0+2,\cdots,M_0+n,\cdots$时，得到相应的点$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，使得$|x_n|>M_0+n$，而$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$（$n=1,2,3,\cdots$）。显然该数列在$U(\infty)=(-\infty,-M_0)\cup(M_0,+\infty)$内，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$，与已知矛盾，故得证。

定理 5.6 设函数$f(x)$在$U(+\infty)$内有定义，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的充要条件是：对任何趋近于$+\infty$且含于$U(+\infty)$的数列$\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

证明 不妨设$f(x)$在$U(+\infty)=(M_0,+\infty)$上有定义，$M_0>0$。

必要性：由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$（可使$M\geqslant M_0$），使得当$x>M$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$；又由于$x_n\in U(+\infty)=(M_0,+\infty)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，对上述的$M>0$，存在相应的自然数$N$，使得当$n>N$时，有$x_n>M$，从而有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

充分性：反证之。假设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A$，则$\exists\varepsilon_0>0$，对任何$M>0$，总存在相应的一点$x$，尽管$x>M$，但有$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$；当依次取$M=M_0+1,M_0+2,\cdots,M_0+n,\cdots$时，得到相应的点$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，使得$x_n>M_0+n$，而$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$（$n=1,2,3,\cdots$）。显然该数列在$U(+\infty)=(M_0,+\infty)$内，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$，

与已知矛盾，故得证。

定理 5.7　设函数 $f(x)$ 在 $U(-\infty)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的充要条件是：对任何趋近于 $-\infty$ 且含于 $U(-\infty)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

证明　不妨设 $f(x)$ 在 $U(-\infty)=(-\infty,-M_0)$ 上有定义，$M_0>0$。

必要性：由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$（可使 $M\geqslant M_0$），使得当 $x<-M$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；又由于 $x_n\in U(-\infty)=(-\infty,-M_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$，对上述的 $M>0$，存在相应的自然数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n<-M$，从而有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$，这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

充分性：反证之，假设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\neq A$，则 $\exists\varepsilon_0>0$，对任何 $M>0$，总存在相应的一点 x，尽管 $x<-M$，但有 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$；当依次取 $M=M_0+1,M_0+2,\cdots,M_0+n,\cdots$ 时，得到相应的点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，使得 $x_n<-(M_0+n)$，而 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$（$n=1,2,3,\cdots$）。显然该数列在 $U(-\infty)=(-\infty,-M_0)$ 内，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$，与已知矛盾，故得证。

我们还可以写出当 $x\to x_0$,、$x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to\infty, f(x)\to+\infty, f(x)\to-\infty$ 的海涅定理，下面仅给出一种形式及其证明。

定理 5.8　设函数 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall x_n\to+\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$。

证明　必要性：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 知 $\forall \mathrm{G}>0$，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时有 $f(x)>G$；又由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 知，对上述的 $M>0$，$\exists \mathrm{N}>0$，当 $n>N$ 时，有 $x_n>M$，从而 $f(x_n)>G$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$。

充分性：反证之。假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq+\infty$，则 $\exists \mathrm{G}_0>0$，对 $\forall M>0$，$\exists x_0>M$，有 $f(x_0)\leqslant G_0$。

取 $M=1,\exists x_1>1$，有 $f(x_1)\leqslant G_0$；

取 $M=2,\exists x_2>2$，有 $f(x_2)\leqslant G_0$；

$\vdots$

取 $M=n,\exists x_n>n$，有 $f(x_n)\leqslant G_0$；

$\vdots$

从而构造出一个数列 $\{x_n\}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq+\infty$，矛盾！

5.3　海涅定理的相关内容分析

5.3.1　海涅定理的条件与结论

海涅定理的条件是充分但不必要的，比如，我们可以将海涅定理的条件减弱为：

若函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限的严格单调数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

证明见后面的推广部分。

海涅定理的逆否命题为证明某些函数极限不存在提供了一种重要方法，主要有下面两个推论。

（1）若存在某个数列 $\{x_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$，而数列 $\{f(x_n)\}$ 不存在极限，则函数 $f(x)$ 在 x_0 也不存在极限。

（2）若存在两个数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0(x_n\neq x_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=x_0(y_n\neq x_0)$，而数列 $\{f(x_n)\}$、$\{f(y_n)\}$ 的极限存在但不相等，则函数 $f(x)$ 在 x_0 也不存在极限。

5.3.2 海涅定理的意义与作用

（1）虽然数列极限与函数极限是分别独立定义的，但是两者是有联系的。海涅定理深刻地揭示了变量变化的整体与部分、连续与离散之间的关系，从而给数列极限与函数极限之间架起了一座可以互相沟通的桥梁。它指出函数极限可化为数列极限。在解决问题时，根据海涅定理，我们可以把关于函数的极限和关于数列的极限问题互相转化。如根据海涅定理，求函数极限可转化为求数列极限，同样求数列极限也可转化为求函数极限。

（2）海涅定理揭示了变量离散变化与连续变化之间的内在联系，在某种条件下，数列极限与函数极限可以互相转换。根据海涅定理的必要性，可以判断函数极限是否存在，根据海涅定理的充分性，又能将数列极限的性质转移到函数极限上来，函数极限的所有性质都可用数列极限的有关性质来加以证明。因此，海涅定理在极限理论和运用中，占有非常重要的地位。

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则按照函数极限的意义，即当变量 x 连续地变化而趋于 x_0（但不等于 x_0）时，有 $f(x)$ 趋于常数 A；这时我们任取一列数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，只有满足 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$ 且 $x_n\neq x_0$ $(n=1,2,\cdots,n,\cdots)$，根据海涅定理的必要性，当变量 x 改为沿着这列数离散地变化而趋于 x_0（但不等于 x_0）时，也有 $f(x_n)\to A$ $(n\to\infty)$。

我们任取一列数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，要求满足 $x_n\to x_0$（$n\to\infty$）且 $x_n\neq x_0$（$n=1,2,\cdots,n,\cdots$），当变量 x 沿着任意这样一列数离散地变化而趋于 x_0（但不等于 x_0）时，$f(x)$ 都趋于同一个常数 A，即都有 $f(x_n)\to A$ $(n\to\infty)$成立，根据海涅定理的充分性，当变量 x 改为连续地变化而趋于 x_0（但不等于 x_0）时，也有 $f(x)\to A$ $(x\to x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 成立。

（3）如果函数在某一点的极限存在，那么根据海涅定理，对于收敛于这一点的任何一个子序列所对应的函数序列必须收敛于同一极限，但是一旦函数在某点的极

限不存在，收敛于这一点的各子序列对应的函数序列就可能出现各种性态，可能是发散的，也可能是收敛的。

5.4　海涅定理的应用

5.4.1　证明函数极限不存在

海涅定理是证明某些函数极限不存在的重要方法，主要依据海涅定理的两个推论。

推论 5.1　若存在某个数列 $\{x_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$，而数列 $\{f(x_n)\}$ 不存在极限，则函数 $f(x)$ 在 x_0 也不存在极限。

推论 5.2　若存在两个数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$（$x_n \neq x_0$），$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$（$y_n \neq x_0$），而数列 $\{f(x_n)\}$、$\{f(y_n)\}$ 的极限存在但不相等，则函数 $f(x)$ 在 x_0 也不存在极限。

例 5.1　设函数 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$，$x \in R\setminus\{0\}$，证明当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在。

证明　证法一：构造一个数列 $\{x_n\}$：$x_n = \dfrac{1}{2n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 且 $x_n \neq 0$，

但是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left[2n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}\right]$ 不存在极限。

故由推论 5.1 知，当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在。

证法二：构造两个数列 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，$x_n \neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，$y_n \neq 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$。

故由推论 5.1 知，当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在。

注　函数 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ 的图像如图 5.1 所示，由图像可见，当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的函数值无限次地在−1 与 1 的范围内振荡，而不趋于任何确定的数。

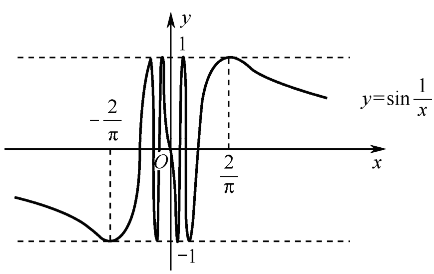


图 5.1

例 5.2　证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 不存在。

证明　设 $x_n=\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)^2$，$y_n=\left(\dfrac{1}{2n\pi+\pi}\right)^2$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$x_n\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，$y_n\neq 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=-1$。

故由推论 5.2 知，$\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 不存在。

例 5.3　证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\sin x)$ 不存在。

证明　取数列 $x_n=2n\pi$，$y_n=2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=0$，

故由推论 5.2 知，$\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\sin x)$ 不存在。

例 5.4　证明函数 $f(x)=\cos x$ 当 $x\to+\infty$ 时极限不存在。

证明　取数列 $x_n=2n\pi$，$y_n=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=0$。

故由推论 5.2 知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在。

例 5.5　证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时极限不存在。

证明　取数列 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$x_n\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，$y_n\neq 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=-\infty$。

故由推论 5.2 知，$f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时极限不存在。

例 5.6　证明狄利克雷函数处处无极限。

证明　设 x_0 为任意实数，由有理数与无理数的稠密性知，总可做出一个极限为 x_0 且不为 x_0 的有理数列 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$（如 $x_n=x_0-\dfrac{1}{n}$）；也总可作出一个极限为 x_0 且不为 x_0 的无理数列 $\{y_n\}$，$y_n\neq y_0$（如 $y_n=x_0-\dfrac{\pi}{n}$）；则 $D(x_n)=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}D(x_n)=1$；而 $D(y_n)=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}D(y_n)=0$。

所以由推论知，$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在。

5.4.2　证明函数极限的性质

函数极限性质的证明除利用极限的定义外，还可以利用转化的方法（即利用归结原则将数列极限与函数极限进行转化），归结原则是证明与数列极限相同的函数极

限性质的一种重要方法，如不等式性质、迫敛性、四则运算法则、局部有界性、局部保号性、柯西收敛准则、单调有界定理等。

例 5.7　证明函数极限的不等式性质

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，且在某邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta')$ 内有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

证明　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，由海涅定理知，对任何在 $\mathring{U}(x_0,\delta')$ 内且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=B$，又易知 $f(x_n)\leqslant g(x_n)$，则根据数列极限的不等性得 $A\leqslant B$，得证。

例 5.8　证明函数极限的迫敛性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且在某 $\mathring{U}(x_0,\ \delta')$ 内有 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$。

证明　$\forall\{x_n\}\in\mathring{U}(x_0,\ \delta')$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，由海涅定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=A$。又因 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，所以 $f(x_n)\leqslant h(x_n)\leqslant g(x_n)$，由数列极限的迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)=A$。

由海涅定理的充分性知 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ 存在且收敛于 A。

例 5.9　证明函数极限的局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某个空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使得 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有界。

证明　用反证法。

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$M=|A|+1$，假设对 x_0 的任意空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 不等式 $|f(x)|<M$ 不成立，即 $\exists x\in\mathring{U}(x_0)$，使得 $|f(x)|\geqslant M$。

不妨设 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\ \delta')$ 内有定义，则对 $\delta_1=\dfrac{\delta'}{2}$，$\delta_2=\dfrac{\delta'}{2^2},\cdots$，$\delta_n=\dfrac{\delta'}{2^n},\cdots$，分别存在相应的 $x_n\in\mathring{U}(x_0,\delta_n)$，满足 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{\delta'}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$，但 $|f(x_n)|\geqslant M=|A|+1$。易知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，$x_n\in\mathring{U}(x_0,\delta_n)$，$x_n\neq x_0$，但有 $|f(x_n)-A|\geqslant |f(x_n)|-|A|\geqslant 1$，即对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 不以 A 为极限，故由海涅定理知，与题设矛盾。得证。

例 5.10　（证明函数极限的局部保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则对任意正数 $r(0<r<A)$，存在 x_0 的某个空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使得对一切 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 恒有 $f(x)>r>0$。

证明 用反证法。

设结论不成立，即对 x_0 的任意一个空心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$，$\exists x\in \overset{\circ}{U}(x_0)$，使得 $f(x)\leqslant r$。

不妨设 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$ 内有定义，则对 $\delta_1=\dfrac{\delta'}{2}$, $\delta_2=\dfrac{\delta'}{2^2},\cdots$, $\delta_n=\dfrac{\delta'}{2^n},\cdots$，分别存在相应的 $x_n\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_n)$，满足 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{\delta'}{2^n}$（$n=1,2,\cdots$），但 $f(x_n)\leqslant r$。易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$x_n\neq x_0$，但有 $|f(x_n)-A|\geqslant A-|f(x_n)|\geqslant A-r$，即对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 不以 A 为极限，故由海涅定理知与题设矛盾。得证。

例 5.11 证明函数极限存在的柯西准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta')$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta'),\forall x',x''\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta),\ \Rightarrow \left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。

证明 必要性：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则由函数极限的定义知，$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0(\delta<\delta')$, 使得对任意的 $x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，有 $\left|f(x)-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。于是对任意的 $x',x''\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

充分性：设数列 $\{x_n\}$ 含于 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$，由已知条件有 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0(\delta<\delta')$, $\forall x',x''\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$ 的定义知，对上述的 $\delta>0$，$\exists N_1>0$，当 $n,m>N_1$ 时有 $0<|x_n-x_0|<\delta$，$0<|x_m-x_0|<\delta$，即 $x_n,x_m\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，从而有 $\left|f(x_n)-f(x_m)\right|<\varepsilon$。

于是按照数列收敛的柯西准则知，数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限存在，记为 A，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

下面证明对任意的数列 $\{y_n\}$ 极限存在。

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=A$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，所以对上述的 $\delta>0$，$\exists N_2>0$，当 $n,m>N_2$ 时有 $0<|y_n-x_0|<\delta$，$0<|y_m-x_0|<\delta$，即 $y_n,y_m\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，从而有 $\left|f(y_n)-f(y_m)\right|<\varepsilon$。

于是按照数列收敛的柯西准则知，数列 $\{f(y_n)\}$ 的极限存在。

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n,m>N$ 时有

$$\left|f(y_n)-A\right|=\left|f(y_n)-f(x_n)+f(x_n)-A\right|\leqslant\left|f(y_n)-f(x_n)\right|+\left|f(x_n)-A\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=A$。

故由海涅定理知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 。

例 5.12　证明函数极限的单调有界定理

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内单调增加且有界，则 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在。

证明　由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义，则对于任一数列 $\{x_n\}\subset(a,b)$ 且 $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ ，由 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加且有界知，数列 $\{f(x_n)\}$ 单调减少且有下界，由数列极限的单调有界定理得，$\{f(x_n)\}$ 收敛，再由海涅定理的推广知，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在。

同理可证 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在。

例 5.13　若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内单调增加，则 $\forall x_0\in(a,b)$ ，极限 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在且 $f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0)$ 。

证明　设 $x_0\in(a,b)$ ，对于 (a,b) 内任一数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $\{x_n\}$ 严格单调减少。

因 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加，则数列 $\{f(x_n)\}$ 单调减少且 $f(x_n)\geqslant f(x_0)$ ，由数列极限的单调有界定理得，$\{f(x_n)\}$ 收敛，再由海涅定理的推广知，$f(x_0+0)$ 存在且 $f(x_0+0)\geqslant f(x_0)$ 。

同理可证 $f(x_0-0)$ 存在且 $f(x_0-0)\leqslant f(x_0)$ 。

5.4.3　求数列的极限

函数的极限运算，有一些很好的性质，如罗比达法则、连续性等，但数列的极限运算并不具备这些性质，利用海涅定理，我们可以将数列极限转化为函数极限，利用函数极限运算的性质，来求数列的极限。

例 5.14　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$,其中 $a>0,b>0,c>0$ ；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+1}$ ；

（3）设 $f(a)=0$ ，$f'(a)=2$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n^2}\right)}{1-\cos\dfrac{1}{n}}$ ；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$ ；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ ；

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n \ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})\mathrm{d}x$。

解 （1）因

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{a^x+b^x+c^x}}=\sqrt[3]{abc}$$

令 $x=\dfrac{1}{n}$，则当 $n\to\infty$时，$x\to0$。

故由海涅定理知 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=\sqrt[3]{abc}$$

（2）因

$$\lim_{x\to\infty}\left(\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{2x^3+2x^2+x}=\frac{1}{2}$$

令 $x=n$，则当 $n\to\infty,x\to+\infty$。

故由海涅定理知 $$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{n+1}{n}-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+1}=\frac{1}{2}$$

（3）由导数的定义知：

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}=2$$

令 $\Delta x=\dfrac{1}{x^2}$，则当 $x\to\infty$ 时 $\Delta x\to0$，于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{x^2}\right)}{1-\cos\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\cos\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{2\left(\frac{1}{2x}\right)^2}=2\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=2\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}=4$$

故由海涅定理知 $$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n^2}\right)}{1-\cos\frac{1}{n}}=4$$

（4）因为
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{x}}=0$$

所以由归结原则可知
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n}=0$$

（5）令
$$g(x)=\left(1+\frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}\ (x>0)$$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\mathrm{e}$ 。

于是由保号性知，存在 $m>1$ 使 $x<m$ 时 $1<\frac{\mathrm{e}}{2}<g(x)<2\mathrm{e}$ ，从而当 $x>m$ 时有
$$g(x)\left[\frac{\mathrm{e}}{2}\right]^{\frac{1}{[x]+1}}<[g(x)]^{1+\frac{1}{x}}=g(x)g(x)^{\frac{1}{x}}<g(x)[2\mathrm{e}]^{\frac{1}{[x]}}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$ 知，上式两端当 $x\to+\infty$ 时均以 e 为极限，于是
$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)]^{1+\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

又
$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n<[g(n)]^{1+\frac{1}{n}}$$

故由归结原则可知
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}$$

（6）设 $x=\frac{1}{n}$ ，则当 $n\to\infty$ 时 $x\to0^+$ ，我们先求 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\tan x\right)^{\frac{1}{x^2}}$ 。

因为
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\tan x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\left\{\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}\right\}^{\frac{\tan x-x}{x^3}}$$

而
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}，\quad\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x}=0$$
$$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}=\mathrm{e}$$

所以
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\tan x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$$

故由归结原则可知
$$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$$

（7）因

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=2$$

故由归结原则可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=2$

5.4.4 判断级数的敛散性

例 5.15 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$ 的敛散性。

解 构造函数 $f(x)=x-\sqrt{\ln(1+x^2)}$

$f(x)$ 的泰勒展开式为

$$f(x)=x-\sqrt{\ln(1+x^2)}=x-\left[x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^6)\right]^{\frac{1}{2}}=x-x\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)\right]^{\frac{1}{2}}$$

当 $x\to 0$ 时，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)\right]^{\frac{1}{2}}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)\right]^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^3)}{x\sqrt{1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1+o(x^2)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)}}=\frac{1}{4}$$

令 $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$，由海涅定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3}=\frac{1}{4}$$

又因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$ 收敛，由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$ 收敛。

5.4.5 判断函数的可导性

例 5.16 证明函数 $f(x)=x^2D(x)$ 在原点可导，在其他点不可导，其中 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数。

证明　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2D(x)}{x}=0$，因此 $f(x)$ 在原点可导。

设 x_0 是不为 0 的点，对大于且趋于 x_0 的有理数列 $\{x_n\}$，大于且趋于 x_0 的无理数列 $\{x_n'\}$ 来说：

若 x_0 为无理点，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{x_n-x_0}=\infty\text{，}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n')-f(x_0)}{x_n'-x_0}=0$$

由海涅定理知 $f(x)$ 在无理数点 x_0 不可导。

若 x_0 为非零有理点，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=2x_0\text{，}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n')-f(x_0)}{x_n'-x_0}=\infty$$

由海涅定理知 $f(x)$ 在非零有理点 x_0 也不可导。

5.4.6　证明函数为常量函数

例 5.17　证明若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $f(x)\equiv A$。

证明　反证法。假设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上不恒为 A，则存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(x_0)=B\neq A$。

因 $f(x)$ 为周期函数，不妨设周期为 $L>0$，记 $x_n=x_0+nL$，则 $x_n\to\infty,(n\to\infty)$，由周期性知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)=B\neq A$。

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，由海涅定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，与假设矛盾。故得证。

例 5.18　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f(2x)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $f(x)\equiv A$。

证明　反证法。假设 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上不恒为 A，则存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_0)=B\neq A$。

因 $f(x)$ 满足 $f(2x)=f(x)$，于是 $f(x_0)=f(2x_0)=f\left(2^2x_0\right)=\cdots=f\left(2^nx_0\right)=\cdots$，得到数列 $x_0,2x_0,2^2x_0,\cdots,2^nx_0,\cdots$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(2^nx_0)=f(x_0)=B$。

又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 及 $2^nx_0\to+\infty,(n\to\infty)$，从而由海涅定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(2^nx_0)=A$，与假设矛盾。故得证。

例 5.19　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f\left(x^2\right)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$，则在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv f(1)$。

证明　反证法。假设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不恒为 $f(1)$，则存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_0)\neq f(1)$。

又因为 $f(x)$ 满足 $f(x^2)=f(x)$，于是 $f(x_0)=f\left(x_0^2\right)=f\left(x_0^{2^2}\right)=\cdots=f\left(x_0^{2^n}\right)=\cdots$，

得到数列 $x_0, x_0^2, x_0^{2^2}, \cdots, x_0^{2^n}, \cdots$。

若 $x_0 \in (0,1)$，则 $\lim_{n\to\infty} x_0^{2^n} = 0$，且 $\lim_{n\to\infty} f\left(x_0^{2^n}\right) = f(x_0)$，而又因为 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$，由海涅定理知 $\lim_{n\to\infty} f\left(x_0^{2^n}\right) = f(1)$；故知 $f(x_0) = f(1)$。

若 $x_0 \in (1,+\infty)$，则 $\lim_{n\to\infty} x_0^{2^n} = +\infty$，且 $\lim_{n\to\infty} f\left(x_0^{2^n}\right) = f(x_0)$，而又因为 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(1)$，由海涅定理知 $\lim_{n\to\infty} f\left(x_0^{2^n}\right) \geqslant= f(1)$。

故知 $f(x_0) = f(1)$。

由上可知，无论 $x_0 \in (0,1)$ 还是 $x_0 \in (1,+\infty)$，都有 $f(x_0) = f(1)$，这与 $f(x_0) \neq f(1)$ 矛盾。故得证。

例 5.20 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f\left(x^2\right) = f(x)$，且在 $x = 0,1$ 点连续，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒为常数。

证明 （1）当 $x \in (-1,1)$ 且 $x \neq 0$ 时，由条件知 $f(x) = f\left(x^2\right) = f\left(x^4\right) = \cdots = f\left(x^{2^n}\right) = \cdots$，令 $x \to \infty$ 得 $x^{2^n} \to 0$，由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续及海涅定理得

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(x^{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} x^{2^n}\right) = f(0)$$

当 $x = 1$ 时，由 $f(x)$ 在 $x = 1$ 点的连续性得

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} f(0) = f(0)$$

当 $x = -1$ 时，得 $f(-1) = f\left[(-1)^2\right] = f(1) = f(0)$。

故当 $x \in [-1,1]$ 时，$f(x) \equiv f(0)$。

（2）当 $x \in (1,+\infty)$ 时，有 $f(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = f\left(\sqrt[4]{x}\right) = \cdots = f\left(\sqrt[2^n]{x}\right) = \cdots$，因 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{x} = 1$，由海涅定理及 $f(x)$ 在 $x = 1$ 点的连续性得

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sqrt[2^n]{x}\right) = \lim_{x\to 1^+} f(1) = f(0)$$

（3）当 $x \in (-\infty,-1)$ 时，由于 $x^2 \in (1,+\infty)$，于是有 $f(x) = f\left(x^2\right) = f(1) = f(0)$。

故对一切 $x \in (-\infty,+\infty)$ 有 $f(x) \equiv f(0)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒为常数。

5.5 海涅定理的推广

5.5.1 把任意数列 $\{x_n\}$ 推广为单调数列

推广 5.1 （i）设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限的严格单调数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

（ii）设函数 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}_+(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\overset{\circ}{U}_+(x_0)$ 的递减数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

（iii）设函数 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}_-(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\overset{\circ}{U}_-(x_0)$ 的递增数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

（iv）设函数 $f(x)$ 在 $U(+\infty)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的充要条件是：对任何趋近于 $+\infty$ 且含于 $U(+\infty)$ 的递增数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

（v）设函数 $f(x)$ 在 $U(-\infty)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的充要条件是：对任何趋近于 $-\infty$ 且含于 $U(-\infty)$ 的递减数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

证明　（i）不妨设 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)=\overset{\circ}{U}(x_0,\ \delta')$ 内有定义。

必要性：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$（可取 $\delta\leqslant\delta'$），使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

对任何以 x_0 为极限且含于 $\overset{\circ}{U}(x_0)=\overset{\circ}{U}(x_0,\ \delta')$ 的严格单调数列 $\{x_n\}$ 来说，对上述的 $\delta>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$ 知，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $0<|x_n-x_0|<\delta$，从而有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$，这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

充分性：用反证法。假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq A$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq A$。

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq A$，则 $\exists\varepsilon_0>0$，对任何 $\delta>0$，总存在相应的一点 x，尽管 $0<x-x_0<\delta$，但有 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$。

现取 $\delta=\delta'$ 时，得到点 x_1，使得 $0<x_1-x_0<\delta$，而 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta'}{2},x_1-x_0\right\}$，得到点 x_2，使得 $0<x_2-x_0<\dfrac{\delta'}{2}$，$x_2<x_1$，而 $|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta'}{3},x_2-x_0\right\}$，得到点 x_3，使得 $0<x_3-x_0<\dfrac{\delta'}{3}$，$x_3<x_2$，而 $|f(x_3)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$$\vdots$$

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta'}{n},x_{n-1}-x_0\right\}$，得到点 x_n，使得 $0<x_n-x_0<\dfrac{\delta'}{n}$，$x_n<x_{n-1}$，而 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$$\vdots$$

故可得一严格递减数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$，与假设矛盾。

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq A$，则 $\exists\varepsilon_0>0$，对任何 $\delta>0$，总存在相应的一点 x，尽管 $0<x_0-x<\delta$，但有 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$。

现取 $\delta=\delta'$ 时，得到点 x_1，使得 $0<x_0-x_1<\delta$，而 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta'}{2},x_0-x_1\right\}$，得到点 x_2，使得 $0<x_0-x_2<\dfrac{\delta'}{2}$，$x_2>x_1$，而 $|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta'}{3},x_0-x_2\right\}$，得到点 x_3，使得 $0<x_0-x_3<\dfrac{\delta'}{3}$，$x_3>x_2$，而 $|f(x_3)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$$\vdots$$

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta'}{n},x_0-x_{n-1}\right\}$，得到点 x_n，使得 $0<x_0-x_n<\dfrac{\delta'}{n}$，$x_n>x_{n-1}$，而 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$$\vdots$$

故可得一严格递增数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$，与假设矛盾。

（ii）、（iii）的证明已经含在（i）内，不再重复写出。

（iv）不妨设 $f(x)$ 在 $U(+\infty)=(M_0,+\infty)$ 上有定义，$M_0>0$。

必要性：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$（可使 $M\geqslant M_0$），使得当 $x>M$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

又由于 $x_n\in U(+\infty)=(M_0,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，对上述的 $M>0$，存在相应的自然数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n>M$，从而有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$。这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

充分性：反证法。假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A$，则 $\exists\varepsilon_0>0$，对任何 $M>0$，总存在相应的一点 x，尽管 $x>M$，但有 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$。

现取 $M=M_0+1$，得到点 x_1，使得 $x_1>M_0+1$，而 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $M=\max\{M_0+2,x_1\}$，得到点 x_2，使得 $x_2>M_0+2$，$x_2>x_1$，而 $|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $M=\max\{M_0+3,x_2\}$，得到点 x_3，使得 $x_3>M_0+3$，$x_3>x_2$，而 $|f(x_3)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$$\vdots$$

取 $M=\max\{M_0+n,x_{n-1}\}$，得到点 x_n，使得 $x_n>M_0+n$，$x_n>x_{n-1}$，而 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$$\vdots$$

故可得一严格递增数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$，与假设矛盾。

（v）的证明与（iv）类似，不再写出。

5.5.2 把 $f(x)$ 存在极限 A 推广为非正常极限

推广 5.2 （i）设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty(-\infty$ 或 ∞）的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty(-\infty$ 或 ∞）。

（ii）设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_+(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty(-\infty$ 或 ∞）的充要条件是：

对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}_+(x_0)$ 的递减数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty(-\infty$ 或 ∞)。

（iii）设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_-(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty(-\infty$ 或 ∞ ）的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}_-(x_0)$ 的递增数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty(-\infty$ 或 ∞)。

（iv）设函数 $f(x)$ 在 $U(+\infty)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ （$-\infty$ 或 ∞ ）的充要条件是：对任何趋近于 $+\infty$ 且含于 $U(+\infty)$ 的递增数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$（$-\infty$ 或 ∞ ）。

（v）设函数 $f(x)$ 在 $U(-\infty)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ （$-\infty$ 或 ∞ ）的充要条件是：对任何趋近于 $-\infty$ 且含于 $U(-\infty)$ 的递减数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$（$-\infty$ 或 ∞ ）。

（vi）设函数 $f(x)$ 在 $U(\infty)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ （$-\infty$ 或 ∞ ）的充要条件是：对任何趋近于 ∞ 且含于 $U(\infty)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$ （$-\infty$ 或 ∞ ）。

证明　（i）不妨设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)=\mathring{U}(x_0,\ \delta')$ 内有定义。

只证：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ 对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$。其余可类似证明。

必要性：由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ 知，$\forall M>0$，$\exists\delta>0$（可取 $\delta\leqslant\delta'$），使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>M$。

对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}(x_0)=\mathring{U}(x_0,\ \delta')$ 的数列 $\{x_n\}$ 来说，对上述的 $\delta>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$ 知，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $0<|x_n-x_0|<\delta$，从而有 $f(x_n)>M$，这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$。

充分性：即由对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$，推出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$。

用反证法。假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq+\infty$，则 $\exists M_0>0$，对任何 $\delta>0$，总存在相应的一点 x，尽管 $0<|x-x_0|<\delta$，但有 $f(x)\leqslant M_0$。

当依次取 $\delta=\delta',\dfrac{\delta'}{2},\cdots,\dfrac{\delta'}{n},\cdots$ 时，得到相应的点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，使得 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{\delta'}{n}$，而 $f(x_n)\leqslant M_0$（$n=1,2,3,\cdots$）。显然该数列在 $\mathring{U}(x_0)=\mathring{U}(x_0,\ \delta')$ 内，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，$x_n\neq x_0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq+\infty$，这与已知矛盾，故得证。

（iv）不妨设 $f(x)$ 在 $U(+\infty)=(X_0,+\infty)$ 上有定义，$X_0>0$。

只证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ 对任何趋近于 $+\infty$ 且含于 $U(+\infty)$ 的递增数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$。其余可类似证明。

必要性：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 知，$\forall M>0$，$\exists X>0$（可使 $X\geqslant X_0$），使得当 $x>X$ 时，总有 $f(x)>M$；又由于 $x_n\in U(+\infty)=(X_0,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$，对上述的 $X>0$，存在相应的自然数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n>X$，从而有 $f(x_n)>M$，这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$。

充分性：反证法。假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq+\infty$，则 $\exists M_0>0$，对任何 $X>0$，总存在相应的一点 x，尽管 $x>X$，但有 $f(x)\leqslant M_0$。

现取 $X=X_0+1$，得到点 x_1，使得 $x_1>X_0+1$，而 $f(x_1)\leqslant M_0$；

取 $X=\max\{X_0+2,x_1\}$，得到点 x_2，使得 $x_2>X_0+2$，$x_2>x_1$，而 $f(x_2)\leqslant M_0$；

取 $X=\max\{X_0+3,x_2\}$，得到点 x_3，使得 $x_3>X_0+3$，$x_3>x_2$，而 $f(x_2)\leqslant M_0$；

$$\vdots$$

取 $X=\max\{X_0+n,x_{n-1}\}$，得到点 x_n，使得 $x_n>X_0+n$，$x_n>x_{n-1}$，而 $f(x_n)\leqslant M_0$；

$$\vdots$$

故可得一严格递增数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq+\infty$，与假设矛盾。

5.5.3 把函数极限存在推广为函数连续及单侧连续

推广 5.3 （i）设函数 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$。

（ii）设函数 $f(x)$ 在 $U_+^0(x_0)$ 内有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 点右连续 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 的递减数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$。

（iii）设函数 $f(x)$ 在 $U_-^0(x_0)$ 内有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 点左连续（$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$）的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 的递增数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$。

证明 （i）不妨设 $\overset{\circ}{U}(x_0)=\overset{\circ}{U}(x_0,\ \delta')$。

必要性：由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

对任何以 x_0 为极限且含于 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$ 来说，对上述的 $\delta>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$ 知，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $0<|x_n-x_0|<\delta$，从而有 $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$，这

就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$。

充分性：反证法。假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，则 $\exists\varepsilon_0>0$，对任何 $\delta>0$，总存在相应的一点 x，尽管 $0<|x-x_0|<\delta$，但有 $|f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$。

当依次取 $\delta=\delta',\dfrac{\delta'}{2},\cdots,\dfrac{\delta'}{n},\cdots$ 时，得到相应的点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，使得 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{\delta'}{n}$，而 $|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$ $(n=1,2,3,\cdots)$。

显然该数列在 $\overset{\circ}{U}(x_0)=\overset{\circ}{U}(x_0,\ \delta')$ 内，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，$x_n\neq x_0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq f(x_0)$，这与已知矛盾，故得证。

（ii）、（iii）类似可证。

5.5.4　把任意数列 $\{x_n\}$ 推广为有理（无理）数列

推广 5.4　设函数 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限且含于 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 的有理数列 $\{x_n\}$ 和无理数列 $\{y_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f(y_n)=A$$

证明　必要性显然。

充分性：只要证明对 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内任意以 x_0 为极限的数列 $\{z_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$。

下面分三种情况证明之。

①若 $\{z_n\}$ 中只有有限项（N 项）是有理数，只要令 $z_n'=z_{n+N}$，则 $\{z_n'\}$ 是 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内以 x_0 为极限的无理数数列，由已知条件知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n')=A$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$。

②若 $\{z_n\}$ 中只有有限项是无理数，同①，也有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$。

③若 $\{z_n\}$ 中既有无穷多项有理数也有无穷多项无理数，设其中所有有理数是 $z_{n_1},z_{n_2},\cdots,z_{n_k},\cdots$，所有无理数是 $z_{m_1},z_{m_2},\cdots,z_{m_k},\cdots$。由于 $z_n\to x_0$ $(n\to\infty)$，所以 $z_{n_k}\to x_0$，$z_{m_k}\to x_0$ $(k\to\infty)$。即 $\{z_{n_k}\}$、$\{z_{m_k}\}$ 分别是 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内任意以 x_0 为极限的有理数数列与无理数数列，由已知条件知 $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{m_k})=A$，即 $\forall\varepsilon>0$，存在自然数 k_0，当 $k>k_0$ 时有 $|f(z_{n_k})-A|<\varepsilon$ 与 $|f(z_{m_k})-\ A|<\varepsilon$。

因为对每一个 n，z_n 不是有理数就是无理数。若 z_n 是有理数，则存在 k 使 $z_n=z_{n_k}$；若 z_n 是无理数，则存在 k 使 $z_n=z_{m_k}$。

于是，存在 $N=\max\{n_{k_0},m_{k_0}\}$，当 $n>N$（有 $n>n_{k_0},n>m_{k_0}$）时，不论 z_n 是有理数还是无理数，都有 $|f(z_n)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$。

注 推广 5.4 同样可以写成其他类型（$x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty, \infty$）的形式。

5.5.5 把函数极限存在推广为含参变量广义积分一致收敛

有兴趣的读者可参看：王秀红，含参变广义积分一致收敛 Heine 定理。烟台师范学院学报（自然科学版），2003.4。这里不再进行详细论述。

参 考 文 献

[1] 谢太光．“归结原则”教学浅见．宜宾师专学报，1989，（2）．

[2] 斯坎得尔• 伊布拉音，艾斯卡尔•阿布力米提．H.E.Heine 定理的应用．新疆教育学院学报，2009，（12）．

[3] 梁俊奇，张庆政．Heine 定理的等价命题及其应用．高等数学研究，2002，（3）．

[4] 吴芸，张伟．Heine 定理的推广与应用．荆州师专学报：自然科学版，1998，（4）．

[5] 杨春德．Heine 定理的应用．楚雄师范学院学报，2009，（3）．

[6] 薛怀玉．Heine 归结原则的推广及推论．陕西师范大学学报：自然科学版，1999，（5）．

[7] 欧启钩．关于海涅定理的一个推广．三明师专学报，1999，（1）．

[8] 俞超．关于海涅定理的注记．宁德师专学报：自然科学版，1998，（9）．

[9] 王秀红．含参变广义积分一致收敛 Heine 定理．烟台师范学院学报：自然科学版，2003，（4）．

[10] 李小新．归结原则的各种形式及其应用．池州师专学报，2004，（6）．

[11] 吴少祥，余庆红．海涅定理及其应用．高等数学研究，2007，（5）．

[12] 王淑云．归结原则在证明函数为常量函数上的应用．山西大同大学学报：自然科学版，2008，（8）．

[13] 李成林，郑继刚．海涅定理及其运用．保山师专学报，2006，（9）．

第 6 章　闭区间上连续函数的性质定理

对函数 $f(x)$ 而言，其在一个区间上连续是指函数在区间上的每一点都连续，其性质反映的是函数的局部性质，是非常复杂、不易掌握的性质。但对于闭区间上的连续函数来说，其性质反映的是函数的整体性质，是非常优良、容易掌握的性质，这些性质是一些理想的性质。它们在函数的理论分析与研究中有着重大的价值，起着十分重要的作用。闭区间上连续函数的性质定理一般是指有界性定理、最值性定理（最大最小值定理）、介值性定理、零点存在定理（根的存在性定理）和一致连续性定理（Cantor 定理）。

6.1　闭区间上连续函数性质定理的历史演变

在整个 19 世纪，连续的概念是人们研讨的对象，波尔查诺、柯西、魏尔斯特拉斯等人给出了连续性的定义，建立了连续性理论。在连续性概念本身正被精细地研究的年代里，为了严密地建立分析而进行艰难的尝试就要求人们证明许多原先已经被直观地接受了的有关连续函数的定理。

波尔查诺是第一个开始对函数性质进行仔细研究的数学家，他第一个用极限概念给出了函数在某一区间内连续的恰当定义。

闭区间上连续函数的“零点定理（又称根的存在定理）”是波尔查诺在 1817 年发表的代表性著作《关于方程在每两个给出相反结果的值之间至少有一个实根的定理的纯粹分析的证明》（也译成《下述定理的纯分析证明——在使得函数取相反（符号）值的每两个变量之间，至少存在函数的一个零点》）中给出的，并尝试给出“纯分析的证明”。他在证明连续函数“零点定理”中，还证明了“有界实数集的最小上界的存在性（上确界存在定理）”，他在证明中所采用的区间套方法被魏尔斯特拉斯 1860 年用来证明波尔查诺–魏尔斯特拉斯定理聚点原理——“有界无限点集必有聚点”。波尔查诺还得到了序列收敛条件的清晰而正确的概念，但是由于波尔查诺在数学界的地位不高，他的工作没有引起人们的注意，他的思想未得到及时传播。历史上，把关于序列收敛条件的正确概念归功于柯西（柯西收敛准则），而把用 $\varepsilon-\delta$ 方法定义极限、函数连续性、导数及其他有关概念的功绩归于魏尔斯特拉斯。

闭区间上连续函数的“介值定理”也是由波尔查诺首先提出和证明的，但是他的证明现在看来不是十分严格。

闭区间上连续函数的“最值性定理”首先是由柯西在他关于多项式的根的存在的证明中不加证明地用过，即“定义在闭区间上的连续函数存在最小值”。魏尔斯特

拉斯 1860 年在他的柏林讲义中证明了“对任何定义在有界闭区域的单变量或多变量的连续函数，存在函数的一个最大值和一个最小值”，即闭区间上连续函数必定达到其上确界和下确界。

我们现在知道“连续”和“一致连续”是两个不同的概念，对于这两个概念的正确认识，德国数学家狄利克雷做出了重要的工作，他在 1862 年的柏林和哥廷根的演讲中，给出并证明了“每一个在闭区间上连续的实函数都是一致连续的”，并在 1904 年得以出版。德国数学家海涅于 1872 年提出、波莱尔于 1895 年完善并证明了“有限覆盖定理”（也称为“海涅-波莱尔定理”），海涅-波莱尔定理理论的中心是一致连续的概念和声称所有闭区间上的连续函数是一致连续的定理，海涅于 1870 年给出了一致连续性的定义，并证明了有界闭区间上连续函数是一致连续的。

闭区间上连续函数的“一致连续性定理”后来以海涅和康托尔的名字命名为“海涅-康托尔定理”：如果 M 是一个紧度量空间，则每一个连续函数 $f: M\to N$，其中 N 是度量空间，都是一致连续的。例如，如果 $f: [a,b]\to R$ 是一个连续函数，则它是一致连续的。所以我们又称闭区间上连续函数的“一致连续性定理”为 Cantor 定理。

6.2 闭区间上连续函数性质定理的内容与证明

6.2.1 有界性定理及其证明

定理 6.1（有界性定理） 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists m,M$，使得 $\forall x\in[a,b]$ 有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 或 $\exists K>0$，使得 $\forall x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant K$。

证法一（应用有限覆盖定理证明）

由连续函数的局部有界性知，$\forall x'\in[a,b],\exists U(x',\delta_{x'}),\exists M_{x'}>0$，使得当 $x\in U(x',\delta_{x'})\bigcap[a,b]$ 时有 $|f(x)|\leqslant M_{x'}$。

当 x' 取遍 $[a,b]$，就得到开区间集 $H=\{U(x',\delta_{x'})\,|\,x'\in[a,b]\}$，显然 H 是闭区间 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖。

由有限覆盖定理得，存在 H 的一个有限子集 $H^*=\{U(x_i,\delta_i)\,|\,x_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,k\}$ 覆盖了闭区间 $[a,b]$，且存在正数 $M_1,M_2,\cdots,M_k$，使得 $\forall x\in U(x_i,\delta_i)\bigcap[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant M_i,i=1,2,\cdots,k$。

令 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}M_i$，则 $\forall x\in[a,b]$，x 必属于某个 $U(x_i,\delta_i)$，从而有 $|f(x)|\leqslant M_i\leqslant M$。

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

证法二（应用致密性定理证明）

用反证法。假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，即对任意的正整数 n，都存在上点 $x_n\in[a,b]$，使得 $|f(x_n)|>n$。取 $n=1,2,3,\cdots$，得到一数列 $\{x_n\},x_n\in[a,b]$ 并且 $|f(x_n)|>n$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=\infty$。

由致密性定理，在有界数列 $\{x_n\}$ 中可以找到一收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$，不妨设

$\lim\limits_{x\to\infty} x_{n_k}=x_0$。由于 $x_{n_k}\in[a,b]$，则 $x_0\in[a,b]$。$f(x)$在$[a,b]$上连续，故在 x_0 点处有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，又 $\lim\limits_{x\to\infty} x_{n_k}=x_0$，根据函数极限与数列极限的关系可得 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

另一方面，由 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$，再由子列的性质可知 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{nk})=\infty$。因此我们得到了两个互相矛盾的结果。也就是说$f(x)$在$[a,b]$上无界的假设与已知条件矛盾，这就证明了定理。

证法三（应用闭区间套定理证明）

用反证法。若 $f(x)$在$[a,b]$上无界，将$[a,b]$等分为两个小区间$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$与$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$，则$f(x)$至少在其中之一上无界，把它们记为$[a_1,b_1]$；再将闭区间$[a_1,b_1]$等分为两个小闭区间$\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$与$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$，同样 $f(x)$至少在其中之一上无界，把它们记为$[a_2,b_2]$;$\cdots$这样的步骤一直做下去，便得到一个闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，$f(x)$在其中任何一个闭区间$[a_n,b_n]$上都是无界的。根据闭区间套定理，存在唯一的实数ξ属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$，并且$\xi=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

因为$\xi\in[a,b]$，而 $f(x)$在点ξ连续，由连续函数的局部有界性定理知，存在$M>0$，$\delta>0$，对于一切$x\in U(\xi,\delta)\cap[a,b]$有$|f(x)|\leqslant M$。

由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\xi$，又可知道对于充分大的 n，$[a_n,b_n]\subset U(\xi,\delta)\cap[a,b]$，于是得到$f(x)$在这些闭区间$[a_n,b_n]$（$n$ 充分大）上有界的结论，从而产生矛盾，证毕。

证法四（应用确界定理证明）

令$E=\{x\mid x\in[a,b], f(t)\text{在}[a,x]\text{上有界}\}$，因$a\in E$，所以$E$非空有界，故有上确界，记$\eta=\sup E$。

由于$f(x)$在a点连续，根据连续函数的局部有界性知，$\eta\neq a$，下面证明$\eta=b$。

反证之。假设$\eta<b$，由$f(x)$在η点连续，则存在$\delta>0$，使得$f(x)$在$(\eta-\delta,\eta+\delta)$有界。又因$\eta$是$E$的上确界，所以$f(x)$在$[a,\eta-\delta]$上有界，从而知$f(x)$在$\left[a,\eta+\dfrac{\delta}{2}\right]$上有界，于是$\eta+\dfrac{\delta}{2}\in E$，这与$\eta$的定义矛盾，故$\eta=b$。

从上面的证明易见$\eta\in E$，即$b\in E$，即$f(x)$在$[a,b]$上有界。

6.2.2　最值性定理及其证明

定理 6.2（最值性定理）　若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$\exists\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使得$\forall x\in[a,b]$有$f(\xi_2)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_1)$。

证法一（应用确界原理证明）

只证取得最大值。由$f(x)$在$[a,b]$上连续知在$[a,b]$上有界，再由确界定理知$f(x)$

的值域 $f([a,b])$ 有上确界，记为 β 。

下面证明 $\exists x_0 \in [a,b]$ 使 $f(x_0)=\beta$ 。

用反证法。假若对一切 $x\in[a,b]$ 都有 $f(x)<\beta$ ，令 $g(x)=\dfrac{1}{\beta-f(x)}, x\in[a,b]$ ，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有上界，设 G 是 $g(x)$ 的一个上界，则 $0<g(x)=\dfrac{1}{\beta-f(x)}\leqslant G, x\in[a,b]$

从而推得

$$f(x)\leqslant \beta-\frac{1}{G}, x\in[a,b]$$

这与 β 为 $f([a,b])$ 的上确界（最小上界）相矛盾，所以必存在 $x_0\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\beta$ ，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值。

同理可证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值。

证法二（应用致密性定理证明）

只证取得最大值。由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知在 $[a,b]$ 上有界，再由确界定理知 $f(x)$ 存在上确界 β ，下面证明 $\exists x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)=\beta$ 。

由上确界的定义知，对 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots), \exists x_n\in[a,b](n=1,2,3,\cdots)$ ，使得 $\beta-\dfrac{1}{n}<f(x_n)\leqslant\beta$ ，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\beta$ 。

由致密性定理证明知， $\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}, \lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$ 且 $x_0\in[a,b], \lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\beta$ 。又 $f(x)$ 在 $x_0\in[a,b]$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ，根据函数极限与数列极限的关系知

$$\beta=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 x_0 点取得最大值 β 。

同理可证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最小值。

证法三（应用闭区间套定理证明）

将区间 $[a,b]$ 二等分为 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$、$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ ，如果对区间 $[a,b]$ 中的任何点 x' 都有 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 中的某一点 x^* 使得 $f(x')\leqslant f(x^*)$ ，则把 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 记为 $[a_1,b_1]$；否则，即对 $[a,b]$ 中的任何点 x'' 都有 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 中的某一点 x^{**} 使得 $f(x'')\leqslant f(x^{**})$ ，则把 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 记为 $[a_1,b_1]$ 。于是这样得到的区间 $[a_1,b_1]$ 上有 $f(x)\leqslant f(\xi_1), x\in[a,b], \xi_1\in[a_1,b_1]$ 。

重复上面的做法，可得一闭区间序列 $\{[a_n,b_n]\}$ ，它满足：

（1） $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$；

（2） $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0 \quad (n\to\infty)$；

（3）在每个 $[a_n,b_n] \quad (n=1,2,\cdots)$ 上有点 $\xi_n\in[a_n,b_n]$, 使得 $f(x)\leqslant f(\xi_n), x\in[a,b]$ 。

由区间套定理知，存在唯一的 x_0 属于所有的闭区间 $[a_n,b_n]$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$；由 $\xi_n\in[a_n,b_n]$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=x_0$，又由 $f(x)$ 连续知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=f(x_0)$。

在 $f(x)\leqslant f(\xi_n),x\in[a,b]$ 两边令 $n\to\infty$ 就得 $f(x)\leqslant f(x_0),x\in[a,b]$，这就证明了 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值。

最小值可用类似方法证明。

证法四（应用有限覆盖定理证明）

以最大值为例，用反证法。

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无最大值，则对任意 $x\in[a,b]$，存在 $\alpha\in[a,b]$，使得 $f(x)<f(\alpha)$。

由 $f(x)$ 在点 x 连续知，$\exists\delta_x>0$，当 $y\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 时，有 $f(y)<f(\alpha)$。

当 x 取遍 $[a,b]$ 时得到一个开区间集 $H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\,|\,x\in[a,b]\}$ 覆盖了闭区间 $[a,b]$。由有限覆盖定理得，存在 H 的一个有限子集 $H^*=\{(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\,|\,x_i\in[a,b],\ i=1,2,\cdots,n\}$ 也覆盖了闭区间 $[a,b]$，对任一 $y\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)$，相应地有 α_i，使得 $f(y)<f(\alpha_i)$ （$i=1,2,\cdots,n$）。

取 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}f(\alpha_i)$，并设 $M=f(\alpha_k)$。因为 $\alpha_k\in[a,b]$，则 n 个开区间中至少有一个开区间 $(x_j-\delta_j,x_j+\delta_j)$ 使 $\alpha_k\in(x_j-\delta_j,x_j+\delta_j)$，于是 $f(\alpha_k)<f(\alpha_j)\leqslant f(\alpha_k)$，矛盾。故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值。

6.2.3　零点存在定理及其证明

定理 6.3（零点存在定理）　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)与f(b)$ 异号，即 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$；或称方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根。

证法一（应用确界原理证明）

不妨设 $f(a)<0,f(b)>0$，记 $E=\{x\,|\,f(x)>0,x\in[a,b]\}$，显然 E 为非空有界数集，故由确界原理知，E 有下确界，设 $\xi=\inf E$。

由连续函数的局部保号性知，$\exists\delta>0$，使得在 $[a,a+\delta)$ 内 $f(x)<0$，在 $(b-\delta,b]$ 内 $f(x)>0$，由此易见 $\xi\neq a,\xi\neq b$，即 $\xi\in(a,b)$。

下面证明 $f(\xi)=0$。

假设 $f(\xi)\neq0$，不妨设 $f(\xi)>0$，则由连续函数的局部保号性知，$\exists\delta'>0$，使得在 $(\xi-\delta',\xi+\delta')\subset(a,b)$ 内 $f(x)>0$，特别地有 $f\left(\xi-\dfrac{\delta'}{2}\right)>0$，推出 $\xi-\dfrac{\delta'}{2}\in E$，这与 $\xi=\inf E$ 矛盾！故得证。

证法二（应用区间套定理证明）

将 $[a,b]$ 等分为两个子区间 $[a,c],[c,b]$。

若 $f(c)=0$，则 $\xi=c$，得证。

若 $f(c)\neq 0$，则 $f(a)$ 与 $f(b)$ 中必有一个与 $f(c)$ 异号，记这个小区间为 $[a_1,b_1]$，它满足 $f(a_1)f(b_1)<0$ 且小区间的长度 $b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$。

再将 $[a_1,b_1]$ 二等分，考虑中点 c_1 的函数值。

若 $f(c_1)=0$，则 $\xi=c_1$，得证。

若 $f(c_1)\neq 0$，则 $f(a_1)$ 与 $f(b_1)$ 中必有一个与 $f(c_1)$ 异号，记这个小区间为 $[a_2,b_2]$，它满足 $f(a_2)f(b_2)<0$ 且小区间的长度 $b_2-a_2=\dfrac{b-a}{2^2}$。

采用这样的方法一直这样进行下去，只可能出现两种情况：

（1）在某一次的中点 c_i 有 $f(c_i)=0$，则 $\xi=c_i$，得证。

（2）若每一次均有 $f(c_i)\neq 0$，则得一闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，$b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$，$f(a_n)f(b_n)<0$，$n=1,2,\cdots$。

由闭区间套定理知，存在唯一一点 $x_0\in[a_n,b_n]\subset[a,b]$（$n=1,2,\cdots$），倘若 $f(x_0)\neq 0$，由连续函数的保号性知，存在 x_0 的邻域 $\cup(x_0)$，使得在 $\cup(x_0)$ 上 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号；又因当 n 充分大时，便有 $[a_n,b_n]\subset\cup(x_0)$，因而 $f(a_n)$ 与 $f(b_n)$ 同号，这与上面的（2）矛盾。

证法三（应用有限覆盖定理证明）

不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$，用反证法。

假设对任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $f(x)\neq 0$，则由连续函数的局部保号性知，$\exists\delta_x>0$，使得 $f(x)$ 在 $U(x,\delta_x)\cap[a,b]$ 上同号。

当 x 取遍 $[a,b]$ 时，得一无限开区间集覆盖闭区间 $[a,b]$，由有限覆盖定理知，存在有限个开区间 $H^*=\{U(x_i,\delta_i)\,|\,i=1,2,\cdots,k\,|\}$ 也能覆盖 $[a,b]$。

在这 k 个开区间中有 i,j 使得 $a\in U(x_i,\delta_i)$，$b\in U(x_j,\delta_j)$，从而 $f(x)$ 在这两个开区间中反号，这与 $f(x)$ 在 $H^*=\{U(x_i,\delta_i)\,|\,i=1,2,\cdots,k\,|\}$ 上同号矛盾。得证。

证法四（应用微积分基本定理证明）

不妨设 $f(a)>0, f(b)<0$，设积分上限函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

则由微积分基本定理知 $F(x)$ 可导且 $F'(x)=f(x)$，由于

$$f(a)=F'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}>0$$

故由保号性知，在 a 点的右邻域内有 $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}>0$，即

$$F(x)-F(a)>0, F(x)>F(a)$$

这表明 $F(a)$ 不是连续函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，同理可得 $F(b)$ 也不是最大值，故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值只能在 (a,b) 内的某点 ξ 取得，ξ 即为极大值点，由费尔马定理知 $F'(\xi)=f(\xi)=0$。

6.2.4　介值性定理及其证明

定理 6.4（介值性定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，若 μ 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何实数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

证法一（应用零点存在定理证明）

令 $g(x)=f(x)-\mu$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(a)=f(a)-\mu, g(b)=f(b)-\mu$，因 μ 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的实数，故 $g(a)\cdot g(b)<0$，由零点存在定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\mu$。

证法二（应用最值性定理证明）

因 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，故由最值性定理知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最小值 m 和最大值 M，显然 μ 是介于 m 与 M 之间的实数。

如果 $M-m$ 是常数，定理显然成立。

如果 $m<M$，由最值性定理知在闭区间 $[a,b]$ 上必存在两点 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=m, f(x_2)=M$。不妨设 $x_1<x_2$ 且 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，显然 $f(x_1)\leqslant\mu\leqslant f(x_2)$，如果 $f(x_1)=\mu$ 或 $f(x_2)=\mu$，则 $\xi=x_1$ 或 $\xi=x_2$，定理成立。

下面证明 $f(x_1)<\mu<f(x_2)$ 的情况：

做辅助函数 $g(x)=f(x)-\mu$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而在 $[x_1,x_2]$ 上连续，且 $g(x_1)=f(x_1)-\mu<0, g(x_2)=f(x_2)-\mu>0$，由零点存在定理知，至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$，使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\mu$。

证法三（应用确界原理证明）

不妨设 $f(a)\leqslant\mu\leqslant f(b)$。

令 $g(x)=f(x)-\mu$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(a)<0, g(b)>0$，于是定理的结论转化为存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g(\xi)=0$。

记 $E=\{x\,|\,g(x)>0, x\in[a,b]\}$，显然 E 为非空有界数集，故由确界原理知，E 有下确界，设 $\xi=\inf E$，显然 $\xi\neq a$，$\xi\in(a,b]$。再证明 $g(\xi)=0$。

假设 $g(\xi)\neq 0$，不妨设 $g(\xi)>0$，则由连续函数的局部保号性知，$\exists\delta>0$，使得在 $(\xi-\delta,\xi+\delta)\subset(a,b)$ 内 $g(x)>0$，特别地有 $g(\xi-\dfrac{\delta}{2})>0$，推出 $\xi-\dfrac{\delta}{2}\in E$，这与 $\xi=\inf E$ 矛盾！故得证。

证法四（应用闭区间套定理证明）

不妨设 $f(a)<f(b)$，即 $f(a)<\mu<f(b)$。

将 $[a,b]$ 等分为两个子区间 $[a,c],[c,b]$，考虑中点 c 的函数值 $f(c)$。

若 $f(c)=\mu$，则 $\xi=c$，得证；

若 $f(c)\neq\mu$，则有 $f(c)<\mu$ 或 $f(c)>\mu$；

若 $f(c)<\mu$，记 $[a_1,b_1]=[c,b]$；

若 $f(c)>\mu$，记 $[a_1,b_1]=[a,c]$，使得 $f(a_1)<\mu<f(b_1)$。

再将 $[a_1,b_1]$ 二等分，考虑中点 c_1 的函数值 $f(c_1)$：

若 $f(c_1)=\mu$，则 $\xi=c_1$，得证；

若 $f(c_1)\neq\mu$，则有 $f(c_1)<\mu$ 或 $f(c_1)>\mu$；

若 $f(c_1)<\mu$，记 $[a_2,b_2]=[c_1,b_1]$；

若 $f(c_1)>\mu$，记 $[a_2,b_2]=[a_1,c_1]$，使得 $f(a_2)<\mu<f(b_2)$。

一直这样进行下去，只可能出现两种情况：

（1）在某一次的中点 c_i 有 $f(c_i)=\mu$，则 $\xi=c_i$，得证。

（2）若每一次均有 $f(c_i)\neq\mu$，则得一闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],\quad b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n},\quad f(a_n)<\mu<f(b_n),\quad n=1,2,\cdots$$

由闭区间套定理知，存在唯一一点 $\xi\in[a_n,b_n]\subset[a,b]$（$n=1,2,\cdots$），使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

由 $f(x)$ 在 ξ 点连续知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=f(\xi)$，再对 $f(a_n)<\mu<f(b_n)$ 应用追敛性知 $f(\xi)=\mu$。

另证：

不妨设 $f(a)\leqslant\mu\leqslant f(b)$。

令 $g(x)=f(x)-\mu$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(a)<0,g(b)>0$，于是定理的结论转化为存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g(\xi)=0$。

将 $[a,b]$ 等分为两个子区间 $[a,c],[c,b]$：

若 $g(c)=0$，则 $\xi=c$，得证；

若 $g(c)\neq0$，则当 $g(c)>0$ 时取 $[a_1,b_1]=[a,c]$，否则取 $[a_1,b_1]=[c,b]$，这时仍有 $g(a_1)<0,g(b_1)>0$，再取 $[a_1,b_1]$ 的中点 c_1，若 $g(c_1)=0$，则 $\xi=c_1$，得证；若 $g(c_1)\neq0$，则当 $g(c_1)>0$ 时取 $[a_2,b_2]=[a_1,c_1]$，否则取 $[a_2,b_2]=[c_1,b_1]$，这时仍有 $g(a_2)<0$，$g(b_2)>0$。

一直这样进行下去，只可能出现两种情况：

（1）在某一次的中点 c_i 有 $g(c_i)=0$，则 $\xi=c_i$，得证；

（2）若每一次均有 $g(c_i)\neq0$，则得一闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，$b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$，$g(a_n)<0,g(b_n)>0$，$n=1,2,\cdots$。

由闭区间套定理知，存在唯一一点 $x_0\in[a_n,b_n]\subset[a,b]$（$n=1,2,\cdots$），倘若 $g(x_0)\neq0$，不妨设 $g(x_0)>0$，由连续函数的保号性知，存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$，对一切 $x\in U(x_0)$ 都有 $g(x)>0$。

又因当 n 充分大时，便有 $[a_n,b_n]\subset U(x_0)$，因而有 $g(a_n)>0$，这与上面的（2）矛盾。

注 介值性定理还可以应用致密性定理、柯西收敛准则来证明，可参见本章后面的文献[28]。

6.2.5　一致连续性定理及其证明

定理 6.5（一致连续性定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续。

证法一（应用区间套定理证明）：

反证法。假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续。即 $\exists\varepsilon_0>0$，对任意的 $\delta>0$，在 $[a,b]$ 上总存在 x_1,x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$。

将 $[a,b]$ 二等分为两个子区间，则 $f(x)$ 至少在其中一个上不一致连续，记这样的子区间为 $[a_1,b_1]$，再将 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个子区间，同样至少有一个子区间，使 $f(x)$ 在其上不一致连续，这样无限继续下去，得一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，$f(x)$ 在每个 $[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$ 上都不一致连续。

由闭区间套定理知，存在唯一一点 $\xi\in[a_n,b_n]\subset[a,b](n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。因 $f(x)$ 在点 ξ 连续，取 $\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_0}{2}>0$，存在 $\delta_0>0$，当 $|x-\xi|<\delta_0$ 时，有 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_0}{2}$。当 n 充分大时，$[a_n,b_n]\subset(\xi-\delta_0,\xi+\delta_0)$，于是对任意的 $x_1,x_2\in[a_n,b_n]$，当 $|x_1-\xi|<\delta_0,|x_2-\xi|<\delta_0$ 时有

$$|f(x_1)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon_0}{2},|f(x_2)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

于是
$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(\xi)|+|f(x_2)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0$$

这与 $[a_n,b_n]$ 的取法矛盾，故得证！

证法二（应用有限覆盖定理证明）

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知，$\forall\varepsilon>0$，对每一点 $x\in[a,b]$ 都存在 $\delta_x>0$，使得当 $x'\in U(x,\delta_x)$ 时有

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad ①$$

当 x 取遍 $[a,b]$，得一无限开区间集 $H=\left\{U\left(x,\dfrac{\delta_x}{2}\right)\middle|x\in[a,b]\right\}$ 覆盖了闭区间 $[a,b]$，由有限覆盖定理得，存在 H 的一个有限子集 $H^*=\left\{U\left(x_i,\dfrac{\delta_i}{2}\right)\middle|x_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,k\right\}$ 覆盖了 $[a,b]$。

记 $\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\left\{\dfrac{\delta_i}{2}\right\}>0$，对任何 $x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta$，$x'$ 必属于 H^* 中的某个开区间，设 $x'\in U\left(x_i,\dfrac{\delta_i}{2}\right)$，即 $|x'-x_i|<\dfrac{\delta_i}{2}$，此时有

$$|x''-x'|\leqslant|x''-x'|+|x'-x_i|<\delta+\frac{\delta_i}{2}\leqslant\frac{\delta_i}{2}+\frac{\delta_i}{2}=\delta_i$$

故由式①得到

$$|f(x')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由此得到$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$。

由一致连续的定义知，$f(x)$在$[a,b]$上一致连续。

证法三（应用致密性定理证明）

反证法。假设$f(x)$在$[a,b]$上不一致连续。即$\exists\varepsilon_0>0$，对任意的$\delta>0$，在$[a,b]$上总存在x',x''，当$|x'-x''|<\delta$时，有$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$。

取$\delta=1$，$\exists x_1',x_1''\in[a,b],|x_1'-x_1''|<1$，有$|f(x_1')-f(x_1'')|\geqslant\varepsilon_0$；

取$\delta=\frac{1}{2}$，$\exists x_2',x_2''\in[a,b],|x_2'-x_2''|<\frac{1}{2}$，有$|f(x_2')-f(x_2'')|\geqslant\varepsilon_0$；

$$\vdots$$

取$\delta=\frac{1}{n}$，$\exists x_n',x_n''\in[a,b],|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$，有$|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0$； ②

$$\vdots$$

故得数列$\{x_n'\},\{x_n''\}\subset[a,b]$，由致密性定理知，存在$\{x_n'\}$的收敛子列$\{x_{n_k}'\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}'=x_0\in[a,b]$。

同时由$|x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\frac{1}{n_k}$推出

$$|x_{n_k}''-x_0|\leqslant|x_{n_k}'-x_{n_k}''|+|x_{n_k}'-x_0|\to 0 \quad (k\to\infty)$$

又得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}''=x_0$。由式②有

$$|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geqslant\varepsilon_0$$

在上式中令$k\to\infty$，由$f(x)$的连续性及数列极限的保不等式性，得到

$$0=|f(x_0)-f(x_0)|=\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geqslant\varepsilon_0$$

这与$\varepsilon_0>0$矛盾。

故$f(x)$在$[a,b]$上一致连续。

证法四（应用确界原理证明）

因为$f(x)$在点a右连续，故$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x',x''\in[a,a+\delta]\subset[a,b]$时有$|x'-x''|<\delta$且$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

设$E=\{x\,|\,\forall x\in[a,b],f(x)\text{在}[a,x]\text{上一致连续}\}$，即

$$E=\{x\,|\,x\in[a,b],\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall x',x''\in[a,x],|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\}$$

由$a\in E,\forall x\in E,x\leqslant b$知数集$E$非空有界，由确界定理知，存在上确界，记$\eta=\sup E$。显然$\eta\leqslant b$。

下面证明$\eta=b$且$\eta\in E$。用反证法。

假设$\eta<b$，由于$f(x)$在点η连续，对上述的$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，当$|x-\eta|<\delta_1$时有$|f(x)-f(\eta)|<\frac{\varepsilon}{2}$。

因为 $\eta=\sup E$，所以存在 $\delta_2>0$，对任意的 $x',x''\in\left[a,\eta-\dfrac{\delta_1}{2}\right]$，当 $|x'-x''|<\delta_2$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta_1}{2},\delta_2\right\}$，则任意的 $x',x''\in\left[a,\eta+\dfrac{\delta}{2}\right]$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，这说明 $\eta+\dfrac{\delta}{2}\in E$，这与 η 的定义矛盾，故 $\eta=b$。

又对给定的 $\varepsilon>0$，因为 $f(x)$ 在点 b 左连续，故存在 $\delta'>0$，当 $x\in[b-\delta',b]$ 时有 $|f(x)-f(b)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。由于 $b\in E$，所以存在 $\delta''>0$，对任意的 $x',x''\in[a,b-\dfrac{\delta'}{2}]$，当 $|x'-x''|<\delta''$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta'}{2},\delta''\right\}$，则任意的 $x',x''\in[a,b]$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，故 $b\in E$。

综上所述，对任给的 $\varepsilon>0$，存在公共的 $\delta>0$，对任意的 $x',x''\in[a,b]$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

6.3　闭区间上连续函数性质定理的相关内容分析

6.3.1　闭区间上连续函数性质定理的理解

1．有界性定理与最值性定理

有界性定理可以简单表述为：闭区间上的连续函数一定在该区间上有界。最值性定理可以简单表述为：闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值。我们可以把“有界性定理”看作“最值性定理”的特殊情况。

我们从直观上来理解，闭区间上连续函数的图像是封闭的连续不断的曲线，可以想象这条曲线不可能纵向（y 轴方向）无限延伸，所以应具有有界性；而开区间的连续函数可以在端点处无限延伸，未必具有有界性。

我们从理论论证来理解，对闭区间上的连续函数，函数在区间上每点的极限都存在，从而在每点的附近都有界，只要用有限覆盖定理，就可以知道只需要有限个有界的区间就可以把函数的定义域覆盖，因而函数在其定义域上也是有界的。若将命题的条件改为开区间，有限覆盖定理的条件不充分，该命题的证明便进行不下去。由此可见闭区间的条件是必须的。

闭区间上的连续函数有界，由确界存在定理知道该函数必有上、下确界。由此可以联想到闭区间上的连续函数总能取得最大、最小值，分别对应于上、下确界。所以要证明闭区间上的连续函数的最值性定理，只需证明该函数能够取到上、下确界的值即可。我们还应该知道，即使是一个有界的函数，只要不是闭区间上的连续函数，就不能保证在定义域上取得最值。

2．介值性定理与零点存在性定理

介值性定理可以简单表述为：闭区间上的连续函数一定能在区间内取到介于两个端点函数值之间的任何值。零点存在定理可以简单表述为：闭区间上的连续函数，若两个端点的函数值异号，则此函数必定存在零点。我们可以把“零点存在定理”看作“介值性定理”的特殊情况。

闭区间上连续函数的介值性定理是一条重要的性质，连续函数在区间内能取得介于端点函数值的值，称为介值。从直观上看，这是显然的，一条连续变化的曲线必会在某个时刻经过介值点；若连续函数的取值可正可负，那么此函数必定存在零点，这就是零点存在定理。当然，不连续的函数就未必具有介值性，具有介值性的函数不一定连续。

3．一致连续性定理

一致连续性定理可以简单表述为：闭区间上的连续函数一定一致连续。

一致连续的直观意义是函数的图像不会在很小的范围内变化任意大，即图像每处切线的斜率不至于任意大。规定一个因变量的变化幅度，则自变量对应的变化幅度不能任意小。

一致连续的函数必定连续，连续未必一致连续。但一致连续性定理（Cantor定理）说明闭区间上的函数，连续与一致连续是等价的。对 Cantor 定理的证明，可以通过函数的点连续，把附近的点联系起来，使函数在一个小的区间里面有类似一致连续的性质，然后通过闭区间的条件，把这种类似的性质拓展开去，变成整个区间上真正的一致连续，用确界定理来证明就用到类似的思想，也可用区间套定理来证明。

闭区间上的连续函数有紧致性，即直观理解上的封闭性，所以具有一些开区间上连续函数不具有的性质。反过来，开区间上连续函数多了一些不可控的性质，譬如函数图像在端点可以纵向无限延伸，如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，或者函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，其图像在端点处无限折曲。这些性质都是由于在自变量很小的变化下，因变量产生了不可控制的变化。这是一致连续的一个反面，开区间上一致连续的函数，除了端点外，能不能产生与闭区间上连续函数相似的整体性质呢？

先讨论导致连续函数在开区间和闭区间上有相异性质的根本原因。开区间上的连续函数跟闭区间上的连续函数的根本差别在于，其左端点的右极限和右端点的左极限是否存在（开区间函数在端点没有定义，所以只从极限是否存在的角度讨论，而不是从是否连续的角度）。开区间上的连续函数在端点不存在左（右）极限，所以端点附近的性质如此“顽劣”，可以无限“延伸”，或无限“折曲”。

有界性和介值定理的讨论，特别强调了闭区间条件所起的作用。闭区间有紧致性，可以通过相关的几个命题来刻画。而这些性质在开区间函数上不成立的原因，就在于端点处的左（右）极限不存在。因为只要加强开区间连续函数的条件，令左端点的右极限，右端点的左极限都存在，这时补充端点处的定义，令端点处的函数

值与极限值相等，就得出一个闭区间的连续函数。这样的开区间连续函数就会在除端点外与闭区间连续函数有相似的整体性质，如有界性，证明和闭区间的几乎一样。而最值对应确界，要么能取得，要么就等于端点的极限值。

左右端点的极限是否存在和一致连续有什么关系？可以证明，两者之间是等价的。若$f(x)$在(a,b)上连续，则$f(x)$在(a,b)上一致连续，当且仅当$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$都存在。

从直观上理解，一致连续把开区间的连续函数的两端给“封闭”了，由此可以看出一致连续和闭区间的紧致性紧密相连。

6.3.2　闭区间上连续函数性质定理的几何意义

1．有界性定理

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists m,M$ ，使得 $\forall x\in[a,b]$ 有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 或 $\exists K>0$ ，使得 $\forall x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant K$ 。

其几何意义为闭区间上连续函数的图像不可能纵向（y 轴方向）无限延伸。或者说，闭区间 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 的图像夹在 $y=m,y=M$ 或 $y=-K,y=K(K>0)$ 两条直线之间。如图 6.1 所示。

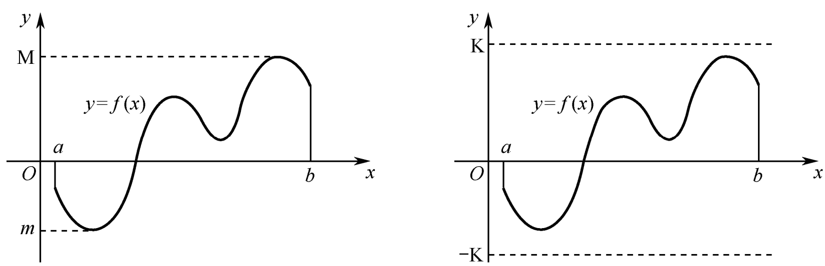


图 6.1

2．最值性定理

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists\xi_1,\xi_2\in[a,b]$ ，使得 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(\xi_2)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_1)$ 。

最值性定理表明如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么至少存在一点 $\xi_1\in[a,b]$，使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，又至少存在一点 $\xi_2\in[a,b]$，使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值。

其几何意义为闭区间$[a,b]$上的一条连续曲线必有最低点，也有最高点，如图 6.2 所示。

3．零点存在定理

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$与$f(b)$ 异号，即 $f(a)f(b)<0$ ，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $f(\xi)=0$ ；或称方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根。

其几何意义为连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点，如图 6.3 所示。

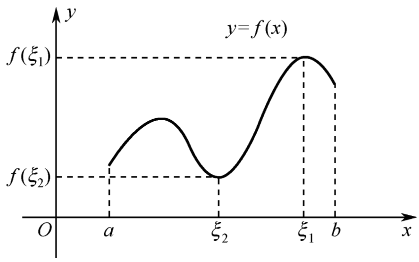


图 6.2

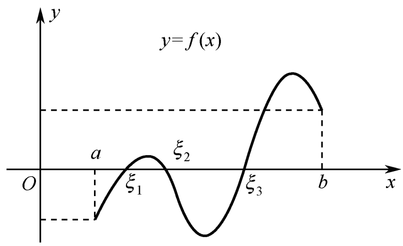


图 6.3

或者说，从 x 轴的下方到 x 轴的上方（或从 x 轴的上方到 x 轴的下方）画一条连续变化的曲线，则此曲线至少经过（穿过）x 轴一次。

4．介值性定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，若 μ 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何实数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

介值定理表明若 f 在 $[a,b]$ 上连续，又不妨设 $f(a)<f(b)$，则 f 在 $[a,b]$ 上必能取得区间 $[f(a),f(b)]$ 中的一切值，即有 $[f(a),f(b)]\subset f([a,b])$。

其几何意义为连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=\mu$ 至少有一个交点，如图 6.4 所示。

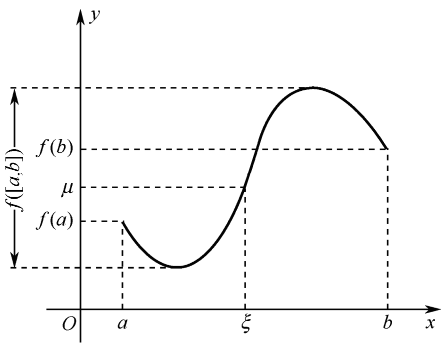


图 6.4

5．一致连续性定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续。

一致连续性定理表明：定义在闭区间上的函数，连续与一致连续是等价的；闭区间上的连续函数具有紧致性（封闭性）。

一致连续性定理也称为康托定理（Cantor 定理）。一致连续性定理表明定义在闭区间上的函数，连续与一致连续是等价的；闭区间上的连续函数具有紧致性（封闭性）。

几何意义为在 $f(x)$ 的连续区间 $[a,b]$ 的任何部分，只要自变量的两个数值接近到一定程度(δ)，就可使对应的函数值达到所指定的接近程度(ε)，且这个接近程度(ε)不随自变量 x 的改变而改变。或者说，当函数的自变量的改变很小时，其函数值的改变也很小；函数图像在定义的区间上连绵不断且函数变化缓慢。

一致连续函数与区间上连续的非一致连续函数的图像形成鲜明的对比，非一致连续函数的图像在定义的区间上，特别是在一致连续性“破坏点”附近是“陡峭”的。

我们再通过区间上连续函数的定义和几何意义来说明：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上

连续，即 $\forall\alpha\in I$，函数 $f(x)$ 在 α 点连续，根据连续的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-\alpha|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$。

从连续的定义不难看出，δ 的大小，一方面与给定的 ε 有关，另一方面与点 α 的位置有关，也就是说当 ε 暂时固定时，因为点 α 的位置不同，δ 的大小也不同，如图 6.5 所示。

当 ε 暂时固定时，在点 α 附近函数图像较“缓”，对应的 δ 较大，在点 β 附近函数图像较“陡”，对应的 δ 较小。于是当 ε 暂时固定时，$\forall\alpha\in I$，$\exists\delta_\alpha>0$，当 $|x-\alpha|<\delta_\alpha$ 时有 $|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$ 成立。对于无限多个 α，存在无限多个 $\delta_\alpha>0$。那么无限多个 δ_α 是否存在最小的 δ 呢？

一般来说，区间 I 上的连续函数并不具有这种性质，具有这种性质的函数就称为区间 I 上的一致连续函数：

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使对区间 I 上的任意一点 x_0，$\forall x\in I$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

这里，哪个是 x_0 哪个是 x，显然是无关紧要的。因此我们不加区分，而用 x_1,x_2 来表示它们，这就是我们常见的一致连续的定义：

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对区间 I 上的任意两点 x',x''，只要 $|x'-x''|<\delta$ 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上非一致连续的原因在于函数图像在原点附近太“陡峭”，以至于对于充分靠近原点的 x 没有公共通用的 δ，如图 6.6 所示。用定义证明如下：

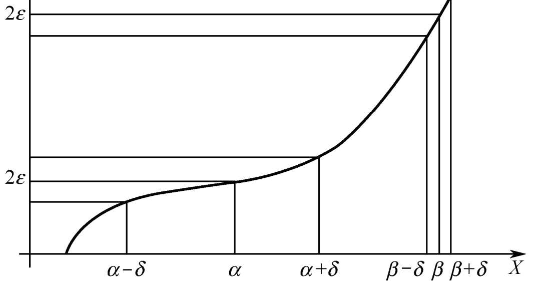


图 6.5

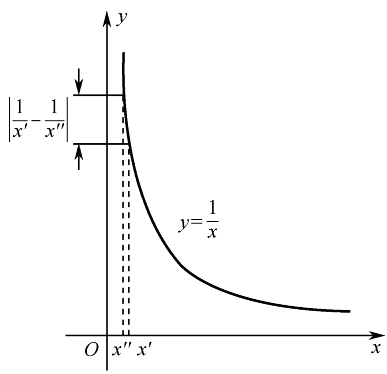


图 6.6

存在 $\varepsilon_0=1$，对无论多么小的正数 $0<\delta<\dfrac{1}{2}$，存在 $(0,1)$ 上的两点 $x'=\delta,x''=\dfrac{\delta}{2}$，虽有 $|x'-x''|<\delta$，但 $|f(x')-f(x'')|=\left|\dfrac{1}{x'}-\dfrac{1}{x''}\right|=\dfrac{1}{\delta}>1=\varepsilon_0$，所以非一致连续。

6.3.3 闭区间上连续函数性质定理的条件与结论

1．有界性定理

有界性定理中的闭区间的条件是必须的，若把定理的条件改为：若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，则结论不一定成立。

如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上连续，却无界。

有界性定理中的连续的条件可以减弱，若把定理的条件改为若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上每一点的极限都存在，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界（证明放在后面给出）。

2．最值性定理

最值性定理中的闭区间的条件是必须的，如果函数在开区间内连续，那么函数在该区间上不一定有最大值或最小值；如果函数在闭区间上有间断点，那么函数在该区间上不一定有最大值或最小值。

例如函数 $f(x)=x$，在开区间 $(0,1)$ 内连续，在 $(0,1)$ 内既无最大值又无最小值。如图 6.7 所示。

函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, 0\leqslant x<1\\ \quad 1, \quad x=1\\ -x+3, 1<x\leqslant 2\end{cases}$，在闭区间 $[0,2]$ 内有间断点，在 $[0,2]$ 内既无最大值又无最小值。如图 6.8 所示。

函数 $f(x)=x-[x]$，在 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$ 内有间断点，在 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$ 内无最大值，有最小值 0。如图 6.9 所示。

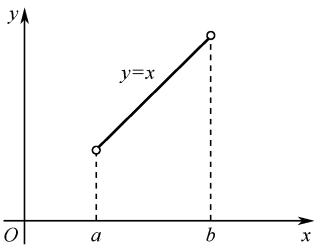


图 6.7

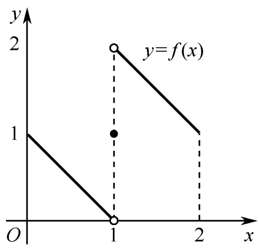


图 6.8

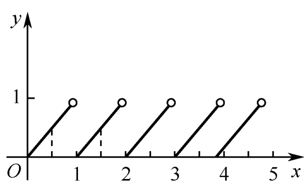


图 6.9

3．零点存在定理

（1）零点存在定理的条件与结论分析

① 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不连续，但 $f(a)f(b)<0$，则零点存在定理的结论不一定成立，即 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可能有零点也可能没有零点（见图 6.10）。

② 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，但 $f(a)f(b)>0$，则零点存在定理的结论不一定成立，即 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可能有零点也可能没有零点（见图 6.11）。

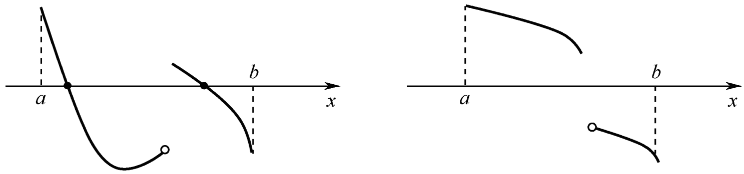


图 6.10

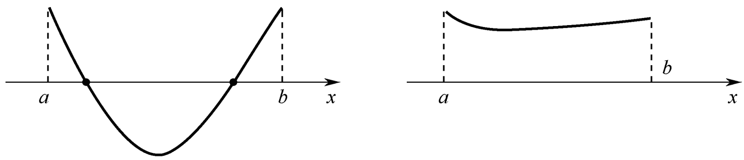


图 6.11

③ 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)>0$，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内不一定只有一个零点，有几个零点不能确定（见图 6.12）；如果增加 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调的条件，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内只存在唯一一个零点。

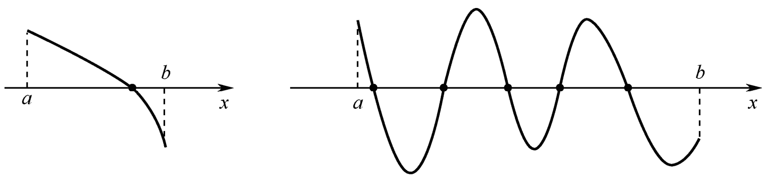


图 6.12

④ 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点，但不一定能够得出 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，或者 $f(a)f(b)<0$（见图 6.13）。

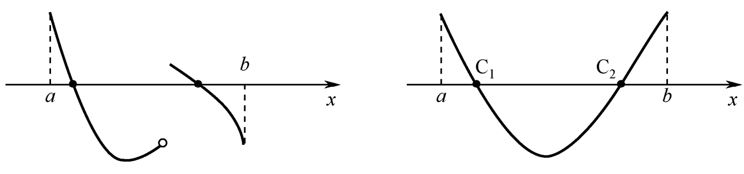


图 6.13

（2）零点存在定理的两个推论

① 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续但没有实根，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒正或恒负。

证明　用反证法。假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上既不恒正也不恒负。则必存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，使得 $f(x_1)<0, f(x_2)>0$，由连续函数的根的存在性定理知，在 $(x_1,x_2)\subset[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，这与 $f(x)\neq 0$ 矛盾。故得证。

② 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且有 n 个不同的实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ $(x_1<x_2<\cdots<x_n)$，则这 n 个实根将区间 (a,b) 分成 $n+1$ 个小区间 $(a,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_n,b)$，在每个小区间内 $f(x)$ 恒正或恒负。

（3）零点存在定理的几点说明

① 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的零点。

②“零点存在定理”又称为“根的存在性定理”或勘根定理。

③ 根的存在定理既能证明方程存在实根、找到实根所在的区间，还能求根的近似值。

例如　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

证明　令 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则在 $f(x)$ 闭区间 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$，由零点定理知，至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$，所以方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

我们可以用二分法找到实根所在的更小区间，求实根的近似值（见图 6.14）：

取 $[0,1]$ 的中点 $\frac{1}{2}$，有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}>0$，则 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内必有方程的根；

再取 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 的中点 $\frac{3}{4}$，有 $f\left(\frac{3}{4}\right)<0$，则 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ 内必有方程的根；

⋮

可求出近似根。

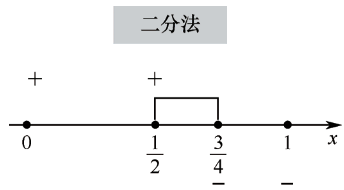


图 6.14

④ 零点存在定理只能判定方程存在根，但不能判定方程有几个根。

4．介值性定理

（1）介值性定理的条件与结论分析

不连续的函数就未必具有介值性，具有介值性的函数不一定连续。如：

① 定义在闭区间 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点不连续，但在 $[-1,1]$ 上具有介值性。

② 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{是有理数但}x\neq 0,1\\ -x, & x\text{是无理数}\\ 1, & x=0\\ 0, & x=1\end{cases}$（$-1\leqslant x\leqslant 1$），是一个处处不连续的函数，其值域为 $[-1,1]$，具有介值性。

（2）介值性定理的推论

① 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 与 M 分别是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，若 μ 是介于 m 与 M 之间的任何实数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

②设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且有 $x_1,x_2\in[a,b],x_1<x_2$ 使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$，若 μ 是介于 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 之间的任何实数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$f(\xi)=\mu$。

（3）应用介值性定理推出的几个性质

① 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续且不是常量函数，则值域 $f(I)$ 也是一个区间；

② 若 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则 $f([a,b])=[m,M]$；

③ 若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上增（减）连续函数且不为常数，则 $f([a,b])=[f(a),f(b)]$ （$[f(b),f(a)]$）。

5．一致连续性定理

（1）开区间上的连续函数未必一致连续

如定义在开区间 $(0,1)$ 上的函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续，但在 $(0,1)$ 上不一致连续。这是因为开区间上的连续函数多了一些不可控的性质，如上面函数的图像在端点处无限折曲（延伸）。

有限开区间上函数的连续与一致连续的根本差别在于，其左端点的右极限和右端点的左极限是否存在，若在端点处不存在左（右）极限，则它在端点附近的性质就会“顽劣”，其图像在端点附近无限折曲（延伸）；若在端点处存在左（右）极限，我们在后面可以证明它在开区间上一致连续。这说明，在有限开区间上，连续函数是否一致连续取决于函数在端点附近的状态。

如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$ 在开区间 $(0,1)$ 上一致连续；而 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}, f(x)=\ln x$, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上不一致连续。

（2）无限区间上的连续函数未必一致连续

我们在后面可以证明，对于无限区间上的连续函数，若它在端点（含无限端点）的极限存在，则它在此无限区间上一致连续，如函数 e^x 在 $(-\infty,a)$ 上一致连续，$\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。若它在端点（含无限端点）的极限不存在，则它在此无限区间上可能一致连续也可能不一致连续，如函数 $f(x)=x, f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，$\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，$\ln x$ 在 $[a,+\infty), a>0$ 上一致连续；而函数 e^x 在 $(a,+\infty)$ 上非一致连续，x^2 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续。

6.3.4　闭区间上连续函数性质定理的统一表述

关于闭区间上连续函数性质的讨论，我们往往从有界性定理入手，进而证明最大最小值定理和介值性定理，这种处理方法逐条给出了闭区间上连续函数的性质，使读者一目了然。但是每条性质都要证明，无形中增添了学习的难度。

下面我们把有界性定理、最值性定理和介值性定理三条性质定理合为一条定理，给出一个统一的命题。

有界性定理　在闭区间上的连续函数一定在该区间上有界。即，若 $f(x)$ 在闭区

间 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists m,M$，使得 $\forall x\in[a,b]$ 有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 或 $\exists K>0$，使得 $\forall x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant K$。

最值性定理 闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值。即，若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使得 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(\xi_2)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_1)$。

介值性定理 闭区间上的连续函数能取遍两个端点函数值之间的一切值。即，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$。若 μ 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何实数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

上述三个定理其实都说明了同一个事实：闭区间上的连续函数的值域也是一个闭区间。用映射的语言可表述为：连续映射 $f:x\to f(x)$ 把闭区间 $[a,b]$ 映射成闭区间 $[m,M]$。用值域的观点可表述为：若 $f\in C[a,b]$，则 $\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}=[m,M]$。我们称上面的统一命题为闭区间上连续函数的映射定理或值域定理。

下面给出闭区间上连续函数的值域定理的证明。

引理 1 若 E 是非空有界集，设 $\mathrm{Sup}E=a$，则存在 $\{x_n\}\subset E,\forall n\in N^+$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$。

引理 2 （零点定理） 若 $f(x)\in C_{[a,b]}$，且 $f(a)f(b)<0$，则在(a,b)内至少存在一点 c，使 $f(c)=0$。

值域定理 若 $f(x)\in C_{[a,b]}$，则 $\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}=[m,M]$。

证明 因 $\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}\neq\varnothing$，所以可设 $M=\mathrm{Sup}\{f(x)\}\,|\,x\in[a,b]$，$m=\inf\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$，由引理 1，$\exists\{x_n\}\subset[a,b]$，使 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=M$。再由致密性定理知有 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使 $\lim\limits_{x\to\infty}x_{n_k}=c\in[a,b]$。

因 $f(x)\in C_{[a,b]}$，从而 $f(c)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x_{n_k})=M$。这说明 $M\in\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$，即 M 有限。

同理可证 $m\in\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$，从而 m 有限，且 $f(d)=m$，$d\in[a,b]$。

$\forall_y\in(m,M)$，设$F(x)=f(x)-y$，则 $F(c)=M-y>0,F(d)=m-y<0$。根据引理 2，存在 $x_0\in(c,d)\subset[a,b]$，使 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=y,y\in\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$，从而有 $[m,M]\subset\{f(x)\ x\in[a,b]\}$。

另外，根据上、下确界定义，显然有 $\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}\subset[m,M]$。故 $\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}=[m,M]$。

由值域定理我们不难得到下列三条推论：

（1）有界性：若 $f(x)\in C_{[a,b]}$，则 $\exists|m|+|M|>0$，$\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant|m|+|M|$。

由值域定理知，$\forall x\in[a,b]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，从而 $f(x)\leqslant|m|+|M|$。

（2）最值性：有界闭区间上连续函数必有最大值与最小值。

从 $M\in\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ 知，$\exists c\in[a,b]$，使 $f(c)=M$，而 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\in[m,M]$，即 $f(x)\leqslant M=f(c)$，故 M 是最大值；同理，m 是最小值。

（3）介值性：定理中的 $f(x)$ 可取遍中 $[m,M]$ 的一切值。

从上述三个推论可知，值域定理其实就包含了闭区间上连续函数的三条性质。

以上将闭区间上的连续函数性质统一成为值域定理的处理方法，与传统的处理方法比较，具有以下特点：

（1）整个性质的引入叙述简单明了，避免了性质的多次证明，从而也可以减轻学习这部分的难度；

（2）突出了值域定理的内涵和重要个性，表明了连续函数三条性质包含在值域定理当中。

6.4　闭区间上连续函数性质定理的推广

6.4.1　有界性定理的推广

1．将连续推广为极限存在

推广 6.1　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上每点的极限都存在（在左端点 a 点仅需右极限存在，在右端点 b 点仅需左极限存在）则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

证明　由已知条件，$\forall x'\in[a,b]$ 都有 $\lim\limits_{x\to x'}f(x)$ 存在（在 a 点右极限存在，在 b 点左极限存在），由极限存在的局部有界性得 $\forall x'\in[a,b],\exists U(x',\delta_{x'}),\exists M_{x'}>0$ 使得当 $x\in U(x',\delta_{x'})\bigcap[a,b]$ 时有 $|f(x)|\leqslant M_{x'}$。

当 x' 取遍 $[a,b]$，就得到开区间集 $H=\{U(x',\delta_{x'})\,|\,x'\in[a,b]\}$，显然 H 是闭区间 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖。

由有限覆盖定理得，存在 H 的一个有限子集 $H^*=\{U(x_i,\delta_i)\,|\,x_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,k\}$ 覆盖了闭区间 $[a,b]$，且存在正数 $M_1,M_2,\cdots,M_k$，使得 $\forall x\in U(x_i,\delta_i)\bigcap[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant M_i,i=1,2,\cdots,k$。令 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}M_i$，则 $\forall x\in[a,b]$，x 必属于某个 $U(x_i,\delta_i)$，从而有 $|f(x)|\leqslant M_i\leqslant M$。

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

2．将有限闭区间推广为有限开区间或半开区间

推广 6.2　若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在且为有限值，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界。

证明　将 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上做连续延拓，令 $F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b)\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x), & x=b\end{cases}$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由闭区间上连续函数的有界性定理知 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界。从而 $F(x)$ 在开区间 (a,b) 上有界，而在 (a,b) 上 $F(x)=f(x)$，故 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界。

类似可得如下的推广：

若函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在为有限值，则 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有界。

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在为有限值，则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界。

3．将有限区间推广为无限区间

推广 6.3　若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且为有限值，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界。

证明　因 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，为有限值，可设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则对 $\varepsilon_0=1,\exists X>a$，使得当 $x>X$ 时恒有 $|f(x)-A|<1$，可得 $|f(x)|<1+|A|$。

又因 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，故在闭区间 $[a,X]$ 上连续，由闭区间上连续函数的有界性定理知，$\exists B>0$，$\forall x\in[a,X]$ 有 $|f(x)|\leqslant B$。

取 $M=\max\{1+|A|,B\}$，则对任意的 $x\in[a,+\infty)$，要么有 $x\in[a,X]$，要么有 $x\in[X,+\infty)$，均有 $|f(x)|\leqslant M$，故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界。

类似可得如下的推广：

若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且为有限值，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界。

若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在且为有限值，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上有界。

若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在且为有限值，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上有界。

若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且为有限值，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。

4．将闭区间推广为紧集

推广 6.4　若 $f(x)$ 是有界闭集 $E\subset R^n$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 E 上有界，即 $f(E)$ 为有界闭集。

注　此推论称为有界闭集定理，证明方法与有界性定理的证明类似，这里不再给出。

5．将闭区间推广为度量空间有界闭集

推广 6.5　若函数 f 在紧集 A 上连续，则 f 在紧集 A 上有界。

此推论称为有紧集的有界性定理，证明参见本章参考文献[17]。

6.4.2　最值性定理的推广

1．将有限闭区间推广为有限开区间或半开区间，端点的极限存在且为有限数

推广 6.6　设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$（$B$ 为有限数），

（1） $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有最大值的充要条件是存在 $x_1\in[a,b)$ 使得 $f(x_1)>B$；

（2） $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有最小值的充要条件是存在 $x_2\in[a,b)$ 使得 $f(x_2)<B$；

（3） $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上既有最大值又有最小值的充要条件是同时存在 $x_1\in[a,b)$ 及 $x_2\in[a,b)$ 使得 $f(x_1)>B$ 且 $f(x_2)<B$。

证明 （1）充分性：

由 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$ 且 $f(x_1)>B$ 知，对 $\varepsilon=f(x_1)-B>0,\exists\delta>0$，当 $x\in(b-\delta,b)$ 时有 $|f(x)-B|<\varepsilon$，从而 $f(x)<B+\varepsilon=f(x_1)$。

由 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续知，$f(x)$ 在闭区间 $[a,b-\delta]$ 上连续，故由闭区间上连续函数的最值性定理知，$f(x)$ 在 $[a,b-\delta]$ 上有最大值 M。显然 $f(x_1)\leqslant M$，故 M 也是 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的最大值。

必要性：反证法。

假设对任意的 $x\in[a,b)$ 都有 $f(x)<B$，则 B 是 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的上界，又由 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$ 知，B 是 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的上确界。

由假设条件及上确界的定义知，对任意的 $x_0\in[a,b)$ 有 $f(x_0)<B$，且存在 $x_1\in[a,b)$ 使得 $f(x_1)>f(x_0)$，因此 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上不存在最大值。

类似可证（2）成立；由（1）、（2）可得（3）成立。

推广 6.7 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$（$A$ 为有限数），

（1） $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有最大值的充要条件是存在 $x_1\in(a,b]$ 使得 $f(x_1)>A$；

（2） $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有最小值的充要条件是存在 $x_2\in(a,b]$ 使得 $f(x_2)<A$；

（3） $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上既有最大值又有最小值的充要条件是同时存在 $x_1\in(a,b]$ 及 $x_2\in(a,b]$ 使得 $f(x_1)>A$ 且 $f(x_2)<A$。

推广 6.7 的证明与推广 6.6 完全类似，这里不再给出。

推广 6.8 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$（$A$、$B$ 都为有限数），

（1） $f(x)$ 在 (a,b) 内存在最大值的充要条件是存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)>\max\{A,B\}$；

（2） $f(x)$ 在 (a,b) 内存在最小值的充要条件是存在 $x_2\in(a,b)$ 使得 $f(x_2)<\min\{A,B\}$；

（3） $f(x)$ 在 (a,b) 上既有最大值又有最小值的充要条件是同时存在 $x_1\in(a,b)$ 及 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)>\max\{A,B\}$ 且 $f(x_2)<\min\{A,B\}$。

证明 （1）充分性：

由 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$ 且 $f(x_1)>\max\{A,B\}$ 知，对 $\varepsilon_1=f(x_1)-A$，$\varepsilon_2=f(x_1)-B$，$\exists\delta_1>0,\delta_2>0$，$\forall x\in(a,a+\delta_1)\subset(a,x_1)$ 有 $|f(x)-A|<\varepsilon_1$，从而 $f(x)<A+\varepsilon_1=f(x_1)$；$\forall x\in(b,b-\delta_2)\subset(x_1,b)$ 有 $|f(x)-B|<\varepsilon_2$，从而 $f(x)<B+\varepsilon_2=f(x_1)$。

又 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，故在 $[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在 $[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 上

存在最大值 M，显然 $M \geqslant f(x_1)$，故 M 也是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的最大值。

另证：将 $f(x)$ 做连续延拓，令 $F(x)=\begin{cases} A, & x=a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ B, & x=b \end{cases}$，则 $F(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取得最大值。因存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)>\max\{A,B\}$，所以最大值点不可能是 a 或 b；不妨设最大值点为 $x_0\in(a,b)$，最大值为 $F(x_0)=f(x_0)$，则 $F(x_1)=f(x_1)\leqslant F(x_0)$。

若 $f(x_1)=F(x_0)$，则 $F(x_1)=f(x_1)$ 是在 $[a,b]$ 上的最大值，故 x_1 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最大值点；$f(x_1)<F(x_0)$，则由题设知 $F(x_0)>f(x_1)\geqslant\max\{A,B\}$，故 x_0 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最大值点；总之 $f(x)$ 在 (a,b) 内能取到最大值。

必要性：反证法。

不妨设 $A<B$，假设对任意的 $x\in(a,b)$ 都有 $f(x)<B$，则 B 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的上界，又由 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$ 知，B 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的上确界。

由假设条件及上确界的定义知，对任意的 $x_0\in(a,b)$ 有 $f(x_0)<B$，且存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)>f(x_0)$，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 上不存在最大值。

类似可证（2）成立；由（1）、（2）可得（3）成立。

2．将有限闭区间推广为有限开区间或半开区间，端点的极限为无限数

推广 6.9　设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，

（1）若 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上存在最小值，不存在最大值；

（2）若 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$，则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上存在最大值，不存在最小值。

证明　（1）由 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$ 知，$\exists x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>0$，从而存在 $\delta>0$，当 $x\in(b-\delta,b)\subset(x_0,b)$ 时有 $f(x)>f(x_0)$ 成立。

又因为 $f(x)$ 在 $[a,b-\delta]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在 $[a,b-\delta]$ 上存在最小值 m，显然 $m\leqslant f(x_0)$，从而 m 也是 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的最小值。由 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$ 知 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上不存在最大值。

类似可证明（2）成立。

推广 6.10　设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，

（1）若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上存在最小值，不存在最大值；

（2）若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$，则 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上存在最大值，不存在最小值。

推广 6.10 的证明与推广 6.9 完全类似，这里不再给出。

推广 6.11　设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，

（1）若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内能取到最小值；

（2）若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内能取到最大值。

证明　（1）在 (a,b) 内任取一固定点 c （例如令 $c=\dfrac{a+b}{2}$ ），对于常数 $f(c)$ ，由 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$ ，故必存在公共的 $\delta>0$ ，使得对 $x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$ 有 $f(x)>f(c)$ 。

任取 $x_1\in(a,a+\delta)$ ，$x_2\in(b,b-\delta)$ 则 $f(x_1)>f(c)$ ，$f(x_2)>f(c)$ ，由于 δ 充分小，总可以保证 $x_1<c<x_2$ 。由 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$ 上连续，故有最小值 $f(x_0),x_0\in(x_1,x_2)$ ，即 $\forall x\in[x_1,x_2]$ 有 $f(x)>f(x_0)$ ，当然也有 $f(c)>f(x_0)$ 。

总之 $\forall x\in(a,b)$ ，当 $x\in(a,x_1)$ 或 $x\in(x_2,b)$ 时有 $f(x)>f(c)\geqslant f(x_0)$ ，当 $x\in[x_1,x_2]$ 也有 $f(x)>f(x_0)$ ，故 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最小值。

类似可证（2）。

我们还可以考虑 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$ 的情况下的推广。

3．将有限区间推广为无限区间，端点的极限存在且为有限数

推广 6.12　设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$ （B 为有限数），则

（1） $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有最大值的充要条件是存在 $x_1\in[a,+\infty)$ 使得 $f(x_1)>B$ ；

（2） $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有最小值的充要条件是存在 $x_2\in[a,+\infty)$ 使得 $f(x_2)<B$ ；

（3） $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上既有最大值又有最小值的充要条件是同时存在 $x_1\in[a,+\infty)$ 及 $x_1\in[a,+\infty)$ 使得 $f(x_1)>B$ 且 $f(x_2)<B$ 。

证明　（1）充分性：

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$ 且 $f(x_1)>B$ 知，对 $\varepsilon=f(x_1)-B>0,\exists X>a$ ，当 $x\in(X,+\infty)$ 时有 $|f(x)-B|<\varepsilon$ ，从而 $f(x)<B+\varepsilon=f(x_1)$ 。

由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续知，$f(x)$ 在闭区间 $[a,X]$ 上连续，故由闭区间上连续函数的最值性定理知，$f(x)$ 在 $[a,X]$ 上有最大值 M 。显然 $f(x_1)\leqslant M$ ，故 M 也是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最大值。

必要性：反证法。

假设对任意的 $x\in[a,+\infty)$ 都有 $f(x)<B$ ，则 B 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的上界，又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$ 知，B 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的上确界。

由假设条件及上确界的定义知，对任意的 $x_0\in[a,+\infty)$ 有 $f(x_0)<B$ 且存在 $x_1\in[a,+\infty)$ 使得 $f(x_1)>f(x_0)$ ，因此 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上不存在最大值。

类似可证（2）成立；由（1）、（2）可得（3）成立。

我们类似地还可以得到以下结论。

推广 6.13　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ （ A 为有限数），则

（1） $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上有最大值的充要条件是存在 $x_1\in(-\infty，b]$ 使得 $f(x_1)>A$ ；

（2） $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上有最小值的充要条件是存在 $x_2\in(-\infty,b]$ 使得 $f(x_2)<A$ ；

（3） $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上既有最大值又有最小值的充要条件是同时存在 $x_1\in(-\infty,b]$ 及 $x_2\in(-\infty,b]$ 使得 $f(x_1)>A$ 且 $f(x_2)<A$ 。

推广 6.14 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$ 为有限数），则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上至少取到最大值、最小值中的某一个。

证明 若 $f(x)\equiv A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则 $\max\limits_{x\in[a,+\infty)}f(x)=\min\limits_{x\in[a,+\infty)}f(x)=A$，即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上既能取到最大值也能取到最小值 A。

若 $\exists x_0\in[a,+\infty)$ 使 $f(x_0)\neq A$，不妨设 $f(x_0)>A$，取 $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)-A}{2}>0,\exists X>x_0$，当 $x>X$ 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon=\dfrac{A+f(x_0)}{2}<f(x_0)$。

又 $f(x)$ 在闭区间 $[a,X]$ 上连续，则在其上存在最大值 M。由于 $x_0\in[a,X]$，故 $f(x_0)\leqslant M$，从而对一切 $x\in[a,+\infty)$ 均有 $f(x)\leqslant M$，即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上能取到最大值。

如果设 $f(x_0)=B<A$，同理可证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上能取到最小值。

我们类似地还可以得到推广 6.15、推广 6.16。

推广 6.15 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$（$B$ 为有限数），则 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上至少取到最大值、最小值中的某一个。

推广 6.16 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$（$A$、$B$ 都为有限数），

（1） $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在最大值的充要条件是存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f(x_1)>\max\{A,B\}$；

（2） $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在最小值的充要条件是存在 $x_2\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f(x_2)<\min\{A,B\}$；

（3） $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上既有最大值又有最小值的充要条件是同时存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$ 及 $x_2\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f(x_1)>\max\{A,B\}$ 且 $f(x_2)<\min\{A,B\}$。

推广 6.17 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$ 为有限数），则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上至少取到最大值、最小值中的某一个。

证明 因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，由有界性定理的推广知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。

若 $f(x)\equiv A$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上既能取到最大值也能取到最小值 A。

若 $\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$ 使 $f(x_0)\neq A$，不妨设 $f(x_0)>A$，由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 知，对 $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)-A}{2}>0$，存在公共的 $X>|x_0|$，当 $x\in(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 时有

$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon=\dfrac{A+f(x_0)}{2}<f(x_0)$。

又 $f(x)$ 在闭区间 $[-X,X]$ 上连续，则在其上存在最大值 M，即 $\forall x\in[-X,X]$ 都有 $f(x)\leqslant M$，再由于 $X>0$ 可以充分大的，总可使 $x_0\in[-X,X]$，所以也有 $f(x_0)\leqslant M$。

总之 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，当 $x\in(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 时有 $f(x)<f(x_0)\leqslant M$，当 $x\in[-X,X]$ 有 $f(x)\leqslant M$，从而对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x)\leqslant M$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上能取到最大值 M。

如果设 $f(x_0)<A$，同理可证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上能取到最小值。

4．将有限区间推广为无限区间，端点的极限为无限数

推广 6.18　设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，

（1）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上存在最小值，不存在最大值；

（2）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上存在最大值，不存在最小值。

证明　（1）由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 知，$\exists x_0\in(a,+\infty)$ 使 $f(x_0)>0$，从而存在 $A>x_0$，当 $x\in(A,+\infty)$ 时有 $f(x)>f(x_0)$。又因为 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上存在最小值 m，显然 $m\leqslant f(x_0)$，故 m 也是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值；由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 知 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上不存在最大值。

类似可证（2）成立。

类似地还可以得到推广 6.19。

推广 6.19　设 $f(x)$ 在 $(-\infty，b]$ 上连续，

（1）若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty，b]$ 上存在最小值，不存在最大值；

（2）若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty，b]$ 上存在最大值，不存在最小值。

推广 6.20　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

（1）若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内能取到最小值；

（2）若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内能取到最大值。

证明　（1）在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取一固定点 c（例如令 $c=\dfrac{a+b}{2}$），对于常数 $f(c)$，由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故必存在公共的 $X>0$，使得对 $x\in(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 有 $f(x)>f(c)$。

又 $f(x)$ 在闭区间 $[-X,X]$ 上连续，则在其上存在最小值 m，即 $\forall x\in[-X,X]$ 都有 $f(x)\geqslant m$，再由于 $X>0$ 可以充分大的，总可使 $c\in[-X,X]$，所以也有 $f(c)\geqslant m$。

总之 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，当 $x\in(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 时有 $f(x)>f(c)\geqslant m$，当 $x\in[-X,X]$ 有 $f(x)\geqslant m$，从而对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x)\geqslant m$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上能取到最小值 m。

同理可证（2）成立。

我们还可以考虑 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ 的情况下的推广。

5．将有限闭区间的连续函数推广为无限区间的连续周期函数

推广 6.21 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且为周期函数，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有最大值和最小值。

证明 设 $f(x)$ 的周期为 T，则由 $f(x)$ 在闭区间 $[0,T]$ 上连续知，必有 $\xi,\eta\in[0,T]$，$\forall x\in[0,T]$ 都有 $f(\eta)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi)$。

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，存在某整数 K，使 $x=KT+x_0, x_0\in[0,T]$，于是 $f(x)=f(KT+x_0)=f(x_0)$，而 $f(\eta)\leqslant f(x_0)\leqslant f(\xi)$，故 $f(\eta)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值为 $f(\xi)$、最小值为 $f(\eta)$。

6.4.3 零点存在定理的推广

1．将有限闭区间推广为有限开区间或半开区间，端点的极限存在且为有限数

推广 6.22 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$（$B$ 为有限数）且 $f(a)\cdot B<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

证明 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), x\in[a,b) \\ B, \quad x=b \end{cases}$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $F(a)\cdot F(b)=f(a)\cdot B<0$，故由零点存在定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$。

推广 6.23 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$（$A$ 为有限数）且 $A\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

证明与推广 6.22 类似。

推广 6.24 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$（$A$、$B$ 为有限数）且 $A\cdot B<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

证明 令 $F(x)=\begin{cases} A, \quad x=a \\ f(x), x\in(a,b) \\ B, \quad x=b \end{cases}$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $F(a)\cdot F(b)=A\cdot B<0$，故由零点存在定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$。

2．将有限闭区间推广为有限开区间或半开区间，端点的极限为无限数

推广 6.25 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$，$f(b)>0$（或 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$，$f(b)<0$），则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

证明 由 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ 知，对任意的 $M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-a<\delta$ 时有

$f(x)<-M$，即至少存在一个点x_1，当$0<x_1-a<\delta$时有$f(x_1)<-M$，从而$f(x_1)<0$。

因$f(x)$在闭区间$[x_1,b]$上连续，且$f(x_1)<0$，$f(b)>0$，由零点存在定理知，至少存在一点$\xi\in(x_1,b)\subset(a,b)$，使得$f(\xi)=0$。

推广 6.26　设$f(x)$在$[a,b)$上连续，$f(a)>0,\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$（或$f(a)<0,\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$），则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$。

证明与推广 6.25 类似。

推广 6.27　设$f(x)$在(a,b)上连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$（或$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$），则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$。

证明参照推广 6.25、推广 6.26 给出。

3．将有限区间推广为无限区间，端点的极限存在且为有限数

推广 6.28　设$f(x)$在$(a,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$（$A$、$B$为有限数），且$A\cdot B<0$，则至少存在一点$\xi\in(a,+\infty)$使得$f(\xi)=0$。

证明　不妨设$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A>0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B<0$，由极限的保号性知，$\exists\delta>0,X>0$，当$0<x-a<\delta$时有$f(x)>0$，当$x>X$有$f(x)<0$，即存在一个点$x_1$，当$0<x_1-a<\delta$时有$f(x_1)>0$，存在一个点$x_2$，当$x_2>X$时有$f(x_2)<0$。在闭区间$[x_1,x_2]$上应用零点存在定理知，至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,+\infty)$使得$f(\xi)=0$。

类似可得下面的推广 6.29、推广 6.30。

推广 6.29　设$f(x)$在$(-\infty,b)$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$（$A$、$B$为有限数），且$A\cdot B<0$，则至少存在一点$\xi\in(-\infty,b)$使得$f(\xi)=0$。

类似也可得下面的特殊情况：

（1）若$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$（$B$为有限数），且$f(a)\cdot B<0$，则至少存在一点$\xi\in[a,+\infty)$使得$f(\xi)=0$。

（2）设$f(x)$在$(-\infty,b]$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$（$A$为有限数），且$A\cdot f(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in(-\infty,b]$使得$f(\xi)=0$。

推广 6.30　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$（$A$、$B$为有限数），且$A\cdot B<0$，则至少存在一点$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$f(\xi)=0$。

证明参照推广 6.28、推广 6.29 给出。

4．将有限区间推广为无限区间，端点的极限为无限数

推广 6.31　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$（或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$），则至少存在一点$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$f(\xi)=0$。

类似也可得下面的特殊情况：

（1）若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$（或

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$），则至少存在一点$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$f(\xi)=0$。

（2）若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B>0$（或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B<0$），则至少存在一点$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$f(\xi)=0$。

6.4.4 介值性定理的推广

1．将有限闭区间推广为有限开区间或半开区间，端点的极限存在且为有限数

推广 6.32 设函数$f(x)$在开区间(a,b)上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$，其中$A,B$为有限数且$A\neq B$，若$\mu$为介于$A,B$之间的任何实数，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\mu$。

证明 将函数$f(x)$做连续延拓，令$F(x)=\begin{cases} A, & x=a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ B, & x=b \end{cases}$，则$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，由闭区间上连续函数的介值性定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$F(\xi)=\mu$，而当$x\in(a,b)$时，$F(x)=f(x)$，故$f(\xi)=\mu$。

类似可得下面的推广 6.33、推广 6.34。

推广 6.33 设$f(x)$在$[a,b)$上连续，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$（$B$为有限数）且$f(a)\neq B$，若$\mu$为介于$f(a)和B$之间的任何实数，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$。

推广 6.34 设$f(x)$在$(a,b]$上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$（$A$为有限数）且$A\neq f(b)$，若$\mu$为介于$A,B$之间的任何实数，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\mu$。

2．将有限闭区间推广为有限开区间或半开区间，端点的极限为无限数

推广 6.35 设$f(x)$在(a,b)上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$（或$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=-\infty$），则对任意实数$\mu$，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\mu$。

证明 由$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$知，$\exists\delta_1>0,\delta_2>0$，$\forall x\in(a,a+\delta_1)$有$f(x)<\mu$，$\forall x\in(b-\delta_2,b)$有$f(x)>\mu$，即存在$x_1\in(a,a+\delta_1)$, $x_2\in(b-\delta_2,b)$使得$f(x_1)<\mu<f(x_2)$，由$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续的介值性定理得，至少存在一点$\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得$f(\xi)=\mu$。

类似可得下面的推广 6.36、推广 6.37。

推广 6.36 设$f(x)$在$(a,b]$上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$，则对任意实数$\mu<f(b)$，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\mu$。

推广 6.37 设$f(x)$在$[a,b)$上连续，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$，则对任意实数$\mu>f(a)$，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\mu$。

3．将有限区间推广为无限区间，端点的极限存在且为有限数

推广 6.38　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=K$，其中 K 为有限数且 $f(a)\neq K$，则对介于 $f(a)$ 与 K 之间的任何数 μ，在 $[a,+\infty)$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$。

证明　因 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，故由连续函数最值性定理的推广知，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有最小值 m 和最大值 M，即存在 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$ 使得 $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$，对任意的 $x\in[a,+\infty)$ 有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$。

不妨设 $f(a)<K$（$f(a)>K$ 同理可证），对任一满足 $f(a)<\mu<K$ 的实数 μ，显然有 $f(x_1)\leqslant f(a)<\mu<K\leqslant f(x_2)$，因 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上连续，故由闭区间上连续函数的介值性定理知，至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）$\subset[a,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

类似可得下面的推广 6.39、推广 6.40。

推广 6.39　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=K$，其中 K 为有限数且 $f(b)\neq K$，则对介于 $f(b)$ 与 K 之间的任何数 μ，在 $(-\infty,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$。

推广 6.40　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，其中 A,B 为有限数且 $A\neq B$，则对介于 A,B 之间的任何数 μ，在 $(-\infty,+\infty)$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$。

4．将有限区间推广为无限区间，端点的极限为无限数

推广 6.41　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$），则对任意实数 μ，至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

类似也可得下面的特殊情况：

（1）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，则对任意大于 A 的实数 μ，至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

（2）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$，则对任意小于 A 的实数 μ，至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

（3）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，则对任意小于 B 的实数 μ，至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

（4）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，则对任意大于 B 的实数 μ，至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

5．将连续函数推广为间断函数

首先给出只有第一类不连续点的介值性定理：

推广 6.42 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上只有第一类不连续点的函数（即 $\forall x_0\in[a,b]$，$f(x_0-0),f(x_0+0)$ 都存在），若 $f(a-0)=f(a+0)$，$f(b-0)=f(b+0)$，则对介于 $f(a+0),f(b-0)$ 之间的任何数 μ，存在 $\xi\in[a,b]$ 和非负数 α,β，满足 $\alpha+\beta=1$，$\alpha f(\xi-0)+\beta f(\xi+0)=\mu$。

证明 若 $f(a+0)=\mu$ 或 $f(b-0)=\mu$，只需取 $\xi=a$ 或 $\xi=b$，$\alpha=1-\beta,\alpha,\beta>0$，则定理显然成立。

不失一般性，设 $f(a+0)<\mu<f(b-0)$，令 $g(x)=f(x)-\mu$，则 $g(x)$ 也只有第一类不连续点，且 $g(a+0)<0<g(b-0)$。

令 $S=\{x\,|\,g(x-0)\leqslant 0,x\in[a,b]\}$，显然 $a\in S,b\notin S$，由于 S 非空有界，故存在上确界，记 $\xi=\inf S$，下面证明对这个 ξ 以及适当的 α,β 定理成立。

先证 $g(\xi-0)\leqslant 0$。事实上，若 $\xi\in S$，则由 S 的定义知 $g(\xi-0)\leqslant 0$ 成立；若 $\xi\notin S$，由上确界的定义，存在收敛到 ξ 的递增数列 $\{x_n\}\subset S$，对每个 x_n 都存在 x_n 的某个左邻域 $U^-(x_n)$，使得 $g(x)<0$，$\forall x\in U^-(x_n)$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，可以选取 $y_n\in U^-(x_n)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\xi$，注意到 $g(y_n)<0$ 以及 $y_n<\xi$，就得到 $g(\xi-0)\leqslant 0$。

再证 $g(\xi+0)\geqslant 0$。若 $g(\xi+0)<0$，于是在 ξ 的某个右邻域 $U^+(\xi)$ 上 $g(x)<0$，由此得到 $\forall x_0\in U^+(\xi)$，$g(x_0-0)\leqslant 0,g(x_0+0)\leqslant 0$，因此 $U^+(\xi)\subset S$，这与 $\xi=\inf S$ 矛盾，故 $g(\xi+0)\geqslant 0$。

如果 $g(\xi-0)\leqslant 0$ 与 $g(\xi+0)\geqslant 0$ 中的某一个等号成立，比如 $g(\xi-0)=0$ 成立，那么取 $\alpha=1,\beta=0$ 即可；如果 $g(\xi-0)\leqslant 0$ 与 $g(\xi+0)\geqslant 0$ 中都只有不等号成立，那么取 $\alpha=\dfrac{-g(\xi+0)}{g(\xi-0)-g(\xi+0)},\ \beta=\dfrac{g(\xi-0)}{g(\xi-0)-g(\xi+0)}$ 即可，定理得证。

推广 6.43 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上只有第一类不连续点的函数，定义 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x+0),f(x-0)\}$，$m=\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x+0),f(x-0)\}$，则对介于 m,M 之间的任何数 μ，存在 $\xi\in[a,b]$ 和非负数 α,β，满足 $\alpha+\beta=1$，$\alpha f(\xi-0)+\beta f(\xi+0)=\mu$。

证明 首先验证集合 $G=\{f(x\pm 0)\,|\,x\in[a,b]\}$ 为闭集。设 $\{y_n\}\subseteq G$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$。由定义存在 $\{x_n\}\subseteq[a,b]$ 使 $y_n=f(x_n+0)$ 或 $y_n=f(x_n-0)$，于是有 $\{x_n\}$ 的某个子列收敛到 $[a,b]$ 中的某一点 x_0，因此 $y_0=f(x_0+0)$ 或 $y_0=f(x_0-0)$，由定义 $y_0\in G$，故 G 为闭集。

因此存在 $x',x''\in[a,b]$ 使得 $\min\{f(x'-0),f(x'+0)\}=m$，$\max\{f(x''-0),f(x''+0)\}=M$，不失一般性设 $x''<x'$。

若 $\mu\geqslant\min\{f(x''-0),f(x''+0)\}$ 或 $\max\{f(x'-0),f(x'+0)\}\geqslant\mu$，注意到 $\min\{f(x'-0),f(x'+0)\}=m\leqslant\mu\leqslant M=\max\{f(x''-0),f(x''+0)\}$，只需取 $\xi=x'$ 或 x''，$\alpha=1$ 或 $\beta=1$ 就可以证得定理。

若 $\max\{f(x'-0),f(x'+0)\}<\mu<\min\{f(x''-0),f(x''+0)\}$，那么 $f(x'-0)<\mu<f(x''+0)$，由推广 6 即得证。

下面给出上跳函数和下跳函数的介值性定理。

定义　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，如果对任何 $x\in[a,b]$ 都有 $\overline{\lim\limits_{t\to x^-}}f(t)\leqslant f(x)\leqslant \underline{\lim\limits_{t\to x^+}}f(t)$，则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的上跳函数；如果对任何 $x\in[a,b]$ 都有 $\underline{\lim\limits_{t\to x^-}}f(t)\geqslant f(x)\geqslant \overline{\lim\limits_{t\to x^+}}f(t)$，则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的下跳函数。

例如　$f(x)=[x]$ 为上跳函数，$f(x)=x-[x]$ 为下跳函数。

说明　上跳函数和下跳函数不一定是单调函数；如果一个函数既是上跳函数又是下跳函数，则必是连续函数；上跳函数可以表示成一个连续函数和一个不减函数之和，一个下跳函数可以表示成一个连续函数和一个不增函数之和。

推广 6.44　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，如果 $f(x)$ 为上跳函数（或下跳函数）且 $f(a)>f(b)$（或 $f(a)<f(b)$），则对介于 $f(a),f(b)$ 之间的任何数 μ，在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$。

证明　证明 $f(x)$ 为上跳函数且 $f(a)>\mu>f(b)$ 的情况：令 $g(x)=f(x)-\mu$，则 $g(x)$ 为上跳函数且 $g(a)>0>g(b)$，只需证明在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得 $g(\xi)=0$。

令 $S=\{x\,|\,g(x)\leqslant 0,x\in[a,b]\}$，由于 $g(b)<0$，所以 S 非空有界，故存在下确界，记 $\xi=\inf S$，显然 $a<\xi<b$，并且若 $\xi_1<\xi$，则 $g(\xi_1)>0$。

若 $g(\xi)<0$，根据上跳函数的定义，有 $\overline{\lim\limits_{t\to\xi^-}}g(t)\leqslant g(\xi)$，由上极限的定义知，对充分小的 $\varepsilon>0$，存在 $\xi_1<\xi$ 使得 $g(\xi_1)\leqslant \overline{\lim\limits_{t\to\xi^-}}g(t)+\varepsilon\leqslant g(\xi)+\varepsilon<0$，这与 ξ 为下确界矛盾。故必有 $g(\xi)\geqslant 0$。

（i）若 $\xi\in S$，由 S 的定义可知 $g(\xi)\leqslant 0$；

（ii）若 $\xi\notin S$，则存在一列 $t_n\in S$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\xi$。

另一方面，由于 $t_n\in S$，因此 $g(t_n)\leqslant 0$，所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}g(t_n)\leqslant 0$；由于 $t_n\in S$，故 $t_n>\xi$，根据上跳函数的定义以及下极限的定义，有 $g(\xi)\leqslant \underline{\lim\limits_{t\to\xi^+}}g(t)\leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}g(t_n)\leqslant 0$。

综上可知，$g(\xi)=0$。同理可证有关下跳函数的情况。

6.4.5　一致连续性定理的推广

1．将有限闭区间推广为有限开区间或半开区间，端点的极限存在且为有限数

推广 6.45　函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，则 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在且为有限数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续。

证明　必要性：对开区间上的连续函数 $f(x)$，做连续延拓得

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ f(b-0), & x=b \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由闭区间上连续函数的一致连续性定理知，$F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续。由一致连续的整体性知， $F(x)$ 在开区间 (a,b) 上也一致连续，亦即 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。

充分性：因为 $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x',x''\in(a,b)$, $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。特别地，当 $x',x''\in(a,a+\delta)$ 时，显然有 $|x'-x''|<\delta$，从而有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，故由函数极限存在的柯西准则知，$f(a+0)$ 存在；同理可证，$f(b-0)$ 存在。

我们可以得到推广 6.45 的两种特殊情况：

（1）函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，则 $f(b-0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续。

（2）函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，则 $f(a+0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上一致连续。

2．将有限区间推广为无限区间，端点的极限存在且为有限数

推广 6.46 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且为有限数，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

证明 要证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，只需证明 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x',x''\in[a,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{①}$$

成立

根据已知条件，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则由柯西收敛准则得 $\forall\varepsilon>0,\exists M>a$，当 $x'>M,x''>M$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；即对于 $(M,+\infty)$ 上的任意两个 x',x'' 都有式①成立。

下面将区间 $[a,+\infty)$ 分成 $[a,M+1]$ 和 $(M,+\infty)$ 两段。

由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续知，$f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续。即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当 $x',x''\in[a,M+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立。即对于 $[a,M+1]$ 内的任意两个 x',x''，只要 $|x'-x''|<\delta_1$，就有式①成立。

取 $\delta=\min\{\delta_1,1\}>0$，对任意的 $x',x''\in[a,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，x',x'' 或同时在第一段 $[a,M+1]$ 内，或同时在第二段 $(M,+\infty)$ 内。由前面的证明知，总有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立。故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

推广 6.47 为推广 6.46 的更一般情况。

推广 6.47 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且为有限数，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

证明 设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$，由函数极限的柯西准则知，$\forall\varepsilon>0$,

$\exists M>0$，当 $x',x''>M$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；当 $x',x''<-M$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

现将 $(-\infty,+\infty)$ 分成三个区间 $(-\infty,-M),[-M-1,M+1],(M,+\infty)$，由于 $f(x)$ 在闭区间 $[-M-1,M+1]$ 上连续，故由一致连续性定理知，$f(x)$ 在 $[-M-1,M+1]$ 上一致连续，即对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $x',x''\in[-M-1,M+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

取 $\delta=\min\{\delta_1,1\}>0$，对任意的 $x',x''\in(-\infty,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，x',x'' 或同时在第一段 $(-\infty,-M)$ 内，或同时在第二段 $[-M-1,M+1]$ 内，或同时在第三段 $(M,+\infty)$ 内。故总有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立。所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

可以得到以下几种特殊情况：

（1）函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且为有限数，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续。

证明　设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$，由函数极限的柯西准则知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $x',x''\in(a,a+\delta_1)$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；$\exists M>0$，当 $x',x''>M$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

现将 $(a,+\infty)$ 分成三个区间 $(a,a+\delta_1),\left[a+\dfrac{\delta_1}{2},M+\dfrac{\delta_1}{2}\right],(M,+\infty)$。

由于 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a+\dfrac{\delta_1}{2},M+\dfrac{\delta_1}{2}\right]$ 上连续，故由一致连续性定理知，$f(x)$ 在 $\left[a+\dfrac{\delta_1}{2},M+\dfrac{\delta_1}{2}\right]$ 上一致连续，即对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 x'，$x''\in\left[a+\dfrac{\delta_1}{2},M+\dfrac{\delta_1}{2}\right]$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

取 $\delta=\min\left\{\delta_2,\dfrac{\delta_1}{2}\right\}>0$，对任意的 $x',x''\in(a,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，x',x'' 或同时在第一段 $(a,a+\delta_1)$ 内，或同时在第二段 $\left[a+\dfrac{\delta_1}{2},M+\dfrac{\delta_1}{2}\right]$ 内，或同时在第三段 $(M,+\infty)$ 内。故总有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立。所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

（2）函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在且为有限数，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上一致连续。

（3）函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在且为有限数，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 上一致连续。

3．将区间上连续的条件推广为任意区间上满足李普希茨（Lipschitz）条件

推广 6.48　函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足李普希茨条件，即存在常数 $L>0$，使对 I 上任意两点 x',x'' 都有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|$，则 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

证明　$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}>0$，对任意的 $x',x''\in I$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-$

$f(x'')|\leqslant L|x'-x''|<L\cdot\dfrac{\varepsilon}{L}=\varepsilon$，故由一致连续的定义知，$f(x)$在$I$上一致连续。

4．将区间上连续的条件推广为任意区间上可导且导函数有界

推广 6.49 函数$f(x)$在区间I上可导且$|f'(x)|\leqslant M,(M>0)$，则$f(x)$在I上一致连续。

证明 因$f(x)$在区间I上可导，所以对任意的$x',x''\in I$，$f(x)$在区间$[x',x'']$上满足拉格朗日中值定理的条件，所以至少存在一点$\xi\in(x',x'')$，使得$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)||x'-x''|\leqslant M|x'-x''|$，$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，对任意的$x'$，$x''\in I$，当$|x'-x''|<\delta$时，有$|f(x')-f(x'')|\leqslant M|x'-x''|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$，故由一致连续的定义知，$f(x)$在$I$上一致连续。

5．将区间上连续的条件推广为任意区间上连续且单调有界

推广 6.50 函数$f(x)$在有限或无穷区间I上连续且单调有界，则$f(x)$在I上一致连续。

证明 只证$f(x)$在有限区间(a,b)上连续且单调递增有界的情况：先证$f(a+0)$与$f(b-0)$存在，在(a,b)内任取一趋于b的递增数列$\{b_n\}$，由已知得$\{f(b_n)\}$递增有上界，故有极限，设$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=A$。即$\forall\varepsilon>0,\exists N$，当$n>N$时有$A-\varepsilon<f(b_n)<A+\varepsilon$；取$\delta=b-b_N>0$，则当$-\delta<x-b<0$即$b_N<x<b$时，在$x,b$之间必有$b_N<x\leqslant b_m<b$，由递增得$A-\varepsilon<f(b_N)<f(x)\leqslant f(b_m)<A+\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$。同理可证$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在。

再证$f(x)$在(a,b)上一致连续，可由推论 6.45 得出。

6．将区间上连续的条件推广为无穷区间上连续的周期函数

推广 6.51 函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且为周期函数，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

证明 设周期为T，则$f(x)$在$[0,2T]$上连续，从而一致连续。$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ $(\delta<T)$，当$x',x''\in[0,2T]$且$|x'-x''|<\delta$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。$\forall x_1,x_2\in R$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，令$x_1=nT+\alpha,(0\leqslant\alpha<T)$；$x_2=nT+\eta,(0\leqslant\eta<2T)$则$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ $|f(\alpha)-f(\eta)|<\varepsilon$，得证。

7．将闭区间上连续的条件推广为闭区间上单调且具有介值性

推广 6.52 设函数$f(x)$在$[a,b]$单调且能取到介于$f(a)$与$f(b)$之间的所有数为其函数值，则$f(x)$在$[a,b]$上一致连续。

证明 由康托定理知，只需证明$f(x)$在$[a,b]$上连续。

反证法。假设$f(x)$在$[a,b]$内某点x_0间断，不妨设$f(x)$在$[a,b]$上递增，则x_0必为第一类间断点，于是$f(x_0)-f(x_0-0)$与$f(x_0+0)-f(x_0)$至少有一个大于 0，不妨

设 $f(x_0)-f(x_0-0)>0$，由 $f(x)$ 递增，$f(x)$ 无法取到 $f(x_0)$ 与 $f(x_0-0)$ 之间的函数值，与题设矛盾！

8．用有限个小区间上的一致连续来刻画整个区间上的一致连续

推广 6.53　$f(x)$ 在有限区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，都可将 I 分成有限个小区间，使得 $f(x)$ 在每个小区间上任意两点的函数值之差的绝对值都小于 ε。

证明　必要性：由于 $f(x)$ 在有限区间 I 上一致连续，依定义有 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x_1x_2\in I$，且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，将 I 作 $n=\left[\dfrac{b-a}{\delta}\right]+1$ 等分：$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots t_{n-1}<t_n=b$。

由于 $t_i-t_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}<\delta$，因而对 t_{i-1},t_i 内任意两点 x_1',x_2'，有 $|x_2'-x_1'|\leqslant t_i-t_{i-1}<\delta$，故有 $|f(x_1')-f(x_2')|<\delta$。

充分性：设对 $\forall\varepsilon>0$，皆可将 I 分成 m 个小区间，其端点满足：$a=s_0<s_1<\cdots<s_{i-1}<s_i<\cdots<s_{m-1}<s_m=b$。由条件应有 $\forall x_1'',x_2''\in|s_{i-1},s_i|$，恒有 $|f(x_1'')-f(x_2'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

取 $\delta=\min|s_1-a,\cdots s_i-s_{i-1},\cdots b-s_{m-1}|$，则当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，必有以下两种情形之一：

① x_1,x_2 同属于一个小区间 $[s_{i-1},s_i]$，依上述结论有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$。

② x_1,x_2 分属于两个小区间：$x_1\in[s_{i-1},s_i],\ x_2\in[s_i,s_{i+1}]$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|=$ $|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f(s_i)|+|f(s_i)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，综合①②知 $f(x)$ 在有限区间 I 上一致连续。

推广 6.54　已知 c 为 I_1 的右端点，为 I_2 的左端点，若 $f(x)$ 在 I_1 和 I_2 上一致连续，则 $f(x)$ 在 $I=I_1\cup I_2$ 上也一致连续。

证明　由 $f(x)$ 在 I_1 和 I_2 上一致连续性，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，$\forall x',x''\in I_1$，当 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。同理 $\exists\delta_2>0$，对 $\forall x',x''\in I_2$，当 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

点 $x=c$ 作为 I_1 的右端点 $f(x)$ 在点 c 为左连续。作为 I_2 的左端点 $f(x)$ 在点 c 为右连续。所以 $f(x)$ 在点 c 连续。故对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta_3>0$ 当 $|x-c|<\delta_3$ 时，有 $|f(x')-f(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$，对 $\forall x',x''\in I$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，分别讨论以下两种情况：

（1）x',x'' 同属于 I_1 或同属于 I_2，则有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立。

（2）x',x'' 分属于 I_1 与 I_2 设 $x'\in I_1 x''\in I_2$，则 $|x'-c|=c-x'<x''-x'<\delta<\delta_3$。故 $|f(x')-f(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，同理得 $|f(x')-f(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

所以$|f(x'')-f(x'')|=|f(x)-f(c)+f(c)-f(x'')|$

$$\leqslant|f(x')-f(c)|+|f(x'')-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以由（1）（2）知，$f(x)$在I上一致连续。

9．用函数的渐近线来刻画函数的一致连续

推广 6.55 设函数$f(x)$在$[n,+\infty)$上连续，且当$x\to+\infty$时$y=f(x)$以直线$y=cx+d$为渐近线，即满足$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(cx+d)]=0\ (c\neq 0)$，则函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。

证明 设$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(cx+d)]=0\ (c\neq 0)$。由柯西收敛准则知，$\forall\varepsilon>0.\exists A>0$，当$x_1,x_2>A$时，有$|f(x_2)-(cx_2+d)-f(x_3)+(cx_3+d)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

所以 $|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-(cx_2+d)-f(x_1)+(cx_1+d)+c(x_2-x_1)|$

$$\leqslant|f(x_2)-(cx_2+d)-f(x_1)+(cx_2+d)|+|c||x_1-x_2|$$

取$\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{2|c|}$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{2|c|}>0$，当$x_1,x_2>A$且$|x_1-x_2|<\delta_1$时，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|c|\delta_2+\frac{\varepsilon}{2}=|c|\frac{\varepsilon}{2|c|}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

又$f(x)$在$[a,A+1]$上连续，从而$f(x)$在$[a,A+1]$上一致连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$，当$x',x''\in[x,A+1]$且$|x'-x''|<\delta_2$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，取$\delta=\min[\delta_1,\delta_2,1]$，则$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in[a,+\infty)$, x'与x''同属于$[a,A+1]$或同属于$[A+1,+\infty)$，而在两种区间下均有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

所以$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。

10．用柯西序列来刻画函数的一致连续

推广 6.56 若$f(x)$在有限区间I上连续，则$f(x)$在区间I上一致连续$\Leftrightarrow f$把柯西序列映射为柯西序列，即当$\{x_n\}$为柯西序列时，$f(x_n)$也为柯西序列。

其中柯西序列是指满足柯西收敛准则条件的序列，也称为基本序列或自收敛序列。

证明 必要性。因$f(x)$在区间I上一致连续，所以$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x',x''\in I$且$|x'-x''|<\delta$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；设$\{x_n\}$为柯西序列，则对$\delta>0,\exists N$, 当$n,m>N$时有$|x_n-x_m|<\delta$，从而有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，即$f(x_n)$也为柯西序列。

充分性：用反证法。假设$f(x)$在区间I上不一致连续，则$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''\in I$, $|x'-x''|<\delta$使$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$，通过取$\delta=\dfrac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$可得$x_n,y_n\in I$, $|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$，但$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$。因$x_n\in I$, I为有限区间，故$\{x_n\}$有界，必存在收敛的子列$\{x_{n_k}\}$，由$|x_n-y_n|\to 0$，故$\{y_n\}$中相应的子列$\{y_{n_k}\}$也收敛于相同的极限，从

而数列$\{z_n\}: x_{n_1}, y_{n_1}, \cdots, x_{n_k}, y_{n_k}, \cdots$也收敛，为柯西序列。

但数列$\{f(z_n)\}: f(x_{n_1}), f(y_{n_1}), \cdots, f(x_{n_k}), f(y_{n_k}), \cdots$恒有$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$，即不是柯西序列。与题设矛盾！

11．用数列的收敛性来刻画函数的一致连续

推广 6.57　若对于$f(x)$定义域(a,b)中任一收敛数列$\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在，则$f(x)$在$(a,b)$上一致连续。

证明　先证$f(x)$在(a,b)上连续。$\forall x_0 \in (a,b)$，设$\{x_n\} \subset (a,b)$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，令$y_n = \begin{cases} x_n, & n = 2k \\ x_0, & n = 2k+1 \end{cases}$，显然$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$且$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$存在，因此其子列$\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{2k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{2k+1}) = f(x_0)$，从而$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{2k}) = f(x_0)$，但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在，故$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{2k}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$，由归结原则知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$。

再证$f(a+0)$与$f(b-0)$存在。设$\{x_n\},\{x_n'\}$为(a,b)内任意两个收敛于a的数列，令$A_n = \begin{cases} x_n, & n = 2k \\ x_n', & n = 2k+1 \end{cases}$，显然$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = a$且$\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n)$存在，从而$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$都存在且相等，由归结原则知$f(a+0)$存在；同理可证$f(b-0)$存在。

由$f(a+0)$与$f(b-0)$存在，通过延拓$f(x)$，可证$f(x)$在(a,b)上一致连续。

推广 6.58　若$f(x)$在区间I上连续，则$f(x)$在区间I上一致连续$\Leftrightarrow \forall x_n, y_n \in I$且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0$。

证明　必要性：用定义易证。

充分性：用反证法。假设$f(x)$在区间I上不一致连续，则$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta$使$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0$，通过取$\delta = \dfrac{1}{n}\ (n = 1, 2, \cdots)$可得$x_n, y_n \in I, |x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$，但$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$，与题设矛盾。

12．用连续模数来刻画函数的一致连续

推广 6.59　函数$f(x)$在(a,b)上一致连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$，函数$\omega_f(\delta) = \sup|f(x_1) - f(x_2)|$（其中$x_1, x_2$是$(a,b)$中满足$|x_1 - x_2| < \delta$的任意两点）称为函数$f(x)$在$(a,b)$上的连续模数。

证明　必要性：因$f(x)$在(a,b)上一致连续，所以$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$，当$x_1, x_2 \in (a,b)$且$|x_1 - x_2| < \delta_1$时，有$|f(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$成立，取$0 < \delta < \delta_1$，从而$\omega_f(\delta) = \sup|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$，即$\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$。

充分性：因 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(\delta)=0$，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当 $0<\delta<\delta_1$ 时有 $|\omega_f(\delta)|<\varepsilon$；令 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta_1$，若 $x_1=x_2$，显然有 $|f(x')-f(x'')|=0<\varepsilon$ 成立；若 $x_1\neq x_2$，令 $|x_1-x_2|<\delta_2$，则 $0<\delta_2<\delta_1$，于是 $|f(x')-f(x'')|\leqslant|\omega_f(\delta_2)|<\varepsilon$。故 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。

6.5 闭区间上连续函数性质定理的应用

6.5.1 有界性定理的应用

闭区间上连续函数的有界性定理是最大最小值定理的特殊情况，或者说是一个推论，因此往往与最大最小值定理一起来使用。应用有界性定理的往往是涉及有限或无限区间的有界性题目，证明的关键是做出（找出）函数连续的闭区间。

例 6.1 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在，则 $f(x)$ 在(a, b)上有界。

证明 题设的函数在开区间上连续，只能得到局部有界性，要证明在此区间上的整体有界性，必须转化为闭区间上的连续函数，为此令

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ f(b-0), & x=b \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由闭区间上连续函数的有界性定理知，$F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界。从而 $F(x)$ 在开区间 (a,b) 上有界，亦即 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界。

例 6.2 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在，证明 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界。

证明 由 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在知 $f(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上有界，为 M_1，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在知 $f(x)$ 在 $(M,+\infty)$ 上有界，为 M_2；又 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\delta,M]$ 上连续知 $f(x)$ 在 $[a+\delta,M]$ 上有界，为 M_3，取 $M=\max\{M_1,M_2,M_3\}$，则 $\forall x\in(a,+\infty)$ 有 $|f(x)|\leqslant M$。

例 6.3 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除一个（或有限个）第一类不连续点外皆连续，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

证明 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一个第一类不连续点 $c\in(a,b)$，即 $f(c-0)$ 与 $f(c+0)$ 都存在，由极限的局部保号性知，$f(x)$ 在 $(c-\delta_1,c)$ 内有界，为 M_1，在 $(c,c+\delta_2)$ 内有界，为 M_2。又 $f(x)$ 在 $[a,c-\delta_1]\cup[c+\delta_2,b]$ 上连续，故由闭区间上连续函数的有界性定理知，$f(x)$ 在 $[a,c-\delta_1]\cup[c+\delta_2,b]$ 上有界，为 M_3，取 $M=\max\{M_1,M_2,M_3\}$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有多于一个的第一类不连续点，可将 $[a,b]$ 分成有限个小区间，使每一个小区间上只有一个第一类不连续点，根据上面的证明可得证。

6.5.2　最值性定理的应用

闭区间上连续函数的最大最小值定理是连续函数的一个重要性质，应用最大最小值定理的往往是涉及有限或无限区间的最值性题目；有时还与费马定理结合使用，用于证明存在某点 x_0 使得 $f'(x_0)=0$ 的问题。

例 6.4　若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都为有限数，且存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内能取到最大值。

证明　令

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b)\\ f(b-0), & x=b\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由闭区间上连续函数的最值性定理知，$F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有最大值。又因 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 不是最大值，即 $F(x)$ 的最大值在开区间 (a,b) 内取到，亦即 $f(x)$ 在在开区间 (a,b) 内取到最大值。

例 6.5　若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 能取到最小值。

证明　因 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，故存在 $M=\max\{f(a),0\}\geqslant 0$，当 $x\in(b-\delta,b)$ 时有 $f(x)\geqslant M$。又 $f(x)$ 在 $[a,b-\delta]$ 上连续，由闭区间上连续函数的最值定理得，$f(x)$ 在 $\xi\in[a,b-\delta]$ 取到最小值，则有 $f(\xi)\leqslant f(a)\leqslant M$；于是 $\forall x\in[a,b)$ 有 $f(\xi)\leqslant f(x)$。

例 6.6　设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。求证：存在 $\xi\in(a,+\infty)$，使 $f'(\xi)=0$。（推广的罗尔定理）

证明　若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内是常数，即 $f(x)=A$，则得证。

若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内不是常数，不妨设 $x_0\in(a,+\infty)$，使 $f(x_0)>A$，即

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=A<f(x_0)$$

由保号性知，$\exists x_1\in(a,x_0)$ 使 $f(x_1)<f(x_0)$，$\exists x_2\in(x_0,+\infty)$ 使 $f(x_2)<f(x_0)$。又 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，从而取到最大值，但由上可知，最大值不会在端点取到，故在 (x_1,x_2) 内部一点 ξ 取到，由费马定理得证。

例 6.7　证明下列各题：

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且有 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$；

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对任意的 $x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$ 使得 $|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$，证明存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$；

（3）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有最大值或最小值。

证明　（1）不妨设 $f'_+(a)<0$，$f'_-(b)>0$。而

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$$

由极限的保号性定理可知，$\exists\delta_1>0$，当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$，从而 $f(x)<f(a)$。

同理 $\exists\delta_2>0$，当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$，从而 $f(x)<f(b)$。

又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最小值，由上可知最小值必在 (a,b) 内。设 $\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，由费马定理知 $f'(\xi)=0$

（2）假设命题不成立，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

设 $c=\min\{|f(x)||x\in[a,b]\}\neq 0$，则由闭区间上连续函数的最值性定理知，存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $|f(x_0)|=c$，则对任意的 $y\in[a,b]$，$|f(y)|>\dfrac{1}{2}|f(x_0)|$，这与已知条件矛盾。所以假设不成立，得证。

（3）i）若 $f(x)\equiv A$，显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 同时有最大、最小值 A。

ii）否则，$\exists x_1,x_2$，当 $x>x_2$ 或 $x<x_1$ 时，$f(x)\to A$。

定义 $\lim\limits_{x\to x_2^-}f(x)=A$ $\lim\limits_{x\to x_1^{+-}}f(x)=A$，存在 $x_1\in\mathring{U}_+(x_1)$，$x_2\in\mathring{U}_-(x_2)$，使得 $f(x_1)>A$ 或 $f(x_1)<A$，$f(x_2)>A$ 或 $f(x_2)<A$，不妨设

$$f(x_1)>A,\quad f(x_2)<A \tag{①}$$

由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[x_{1,}x_2]$ 上连续，由最值定理知存在 $\xi\in[x_1,x_2]$，使得 $f(\xi)$ 最大（或最小）。

由式①知 $\xi\neq x_1,x_2$，因此当 $x_1,x_2\to\infty$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有最大值或最小值。

6.5.3　零点存在定理的应用

1．证明方程至少有一个或几个实根

例 6.8　证明下列各题

（1）试证方程 $x=a\sin x+b\ (a>0,b>0)$ 至少有一个正根，并且它不超过 $b+a$；

（2）证明任一实系数奇次代数方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}=0$，其中 $a_{2n-1}\neq 0,n=1,2,\cdots$ 至少有一个实根；

（3）证明方程 $\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有两个实根；

（4）证明方程 $\arctan x-kx=0\quad(0<k<1)$ 存在正根；

（5）证明 $x-2\sin x=a\ \ (a>0)$ 至少有一个正实根。

证明　（1）构造函数 $f(x)=x-a\sin x-b$，显然 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续，且

$$f(0)=-b<0,f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0$$

当 $\sin(a+b)=1$ 时，$f(a+b)=0$，这时 $a+b$ 就是方程的一个根。

当 $\sin(a+b)<1$ 时，即 $f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]>0$，此时 $f(a)$ 与 $f(a+b)$ 异号。故由根的存在性定理知，在 $(0,a+b)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\xi-a\sin\xi-b=0,\quad 或\ \xi=a\sin\xi+b$$

即方程　$x=a\sin x+b$ 至少有一个根 ξ 介于 0 与 $a+b$ 之间。

总之，方程 $x=a\sin x+b\quad(a>0,b>0)$ 至少有一个正根，并且它不超过 $b+a$。

（2）不妨设 $a_{2n-1}>0$，

构造函数　$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，故存在 $x_1>0,x_2<0$，使得 $f(x_1)>0,\ f(x_2)<0$。

因为 $f(x)$ 在 $[x_2,x_1]$ 上连续，故由根的存在性定理知，存在 $x_0\in(x_2,x_1)$，使得 $f(x_0)=0$，即代数方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}=0\ (a_{2n-1}\neq0,n=1,2,\cdots)$ 至少有一个实根。

（3）做函数　$$f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}$$

因为　$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}\right)=+\infty,$$

$$f(\mathrm{e})=1-1-\sqrt{2}=-\sqrt{2}<0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}\right)=+\infty$$

由根的存在定理知，$f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内各至少有一个零点，即方程 $\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有两个实根。

（4）设 $f(x)=\arctan x-kx$，则 $f(0)=0$，而 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-k$ 在 0 点附近大于 0，即 $f(x)$ 在 0 点附近严格递增，即 $\exists x_1>0$，使 $f(x_1)>f(0)=0$，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以 $\exists x_2>x_1>0$，使 $f(x_2)<0$，得证。

（5）设 $f(x)=x-2\sin x-a$，则 $f(0)=-a<0$，又存在 N，使 $N\pi>a$，故

$$f(N\pi)=N\pi-2\sin N\pi-a=N\pi-a>0$$

得证。

例 6.9　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

（1）存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $\sin^2[\pi f(x_0)]=x_0$；

（2）若 $f(x)=x$，则 $\sin^2(\pi x)=x$ 有且仅有三个根。

证明　（1）设 $F(x)=\sin^2[\pi f(x)]-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)\geqslant0$，$F(1)\leqslant0$。

若 $F(0)=0$，则取 $x_0=0$，使得 $\sin^2[\pi f(x_0)]=x_0$；

若 $F(1)=0$，则取 $x_0=1$，使得 $\sin^2[\pi f(x_0)]=x_0$；

若$F(0)>0,F(1)<0$，则由根的存在定理知，存在$x_0\in(0,1)$，使得$F(x_0)=0$，即$\sin^2[\pi f(x_0)]=x_0$。

得证。

（2）令$t=\pi x$，$g(t)=\sin^2 t-\dfrac{t}{\pi}$。当$t<0$时，$g(t)>0$；当$t>\pi$时，$g(t)<0$。故$g(t)=0$的根只能分布在$[0,\pi]$上，易知$g(0)=0$，$g'(t)=\sin 2t-\dfrac{1}{\pi}$。由函数图像可知，函数$\sin 2t$与$\dfrac{1}{\pi}$在$[0,\pi]$上只有两个交点$t_1,t_2\left(0<t_1<t_2<\dfrac{\pi}{2}\right)$。$g(t)$在区间$[0,t_1]$，$[t_2,\pi]$上单调递减，在区间$[t_1,t_2]$上单调递减。

因为$g(t_1)<g(0)=0$，$g(t_2)>g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0$，$g(\pi)=-1<0$。所以，由零点定理知$g(t)=0$在$[0,\pi]$只有三个实根，对应$\sin^2(\pi x)=x$有且仅有三个根（分布在$[0,1]$上）。

例 6.10 设a_1,a_2,a_3为正数，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$，证明方程$\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$在区间$(\lambda_1,\lambda_2)$与$(\lambda_2,\lambda_3)$内各有一个根。

证明 设
$$f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$$
则当$x\to\lambda_1^+$时，$f(x)\to+\infty$；当$x\to\lambda_2^-$时，$f(x)\to-\infty$。于是存在$x_1<x_2$，$x_1,x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$使$f(x_1)f(x_2)<0$，所以$f(x)$在$(\lambda_1,\lambda_2)$内有一个根。

同理可证，$f(x)$在(λ_2,λ_3)内有一个根。

2．证明方程有且仅有一个实根

例 6.11 证明下列各题：

（1）证明方程$\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=0$有且仅有一个实根；

（2）证明方程$x^3+px+q=0\ (p>0)$有且只有一个实根。

证明 （1）令
$$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
因为
$$F(0)=\int_0^0\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t+\int_1^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<0$$
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t+\int_0^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t>0$$
由根的存在定理知，$F(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一个零点。

下面再证只有一个实根。

因为
$$F'(x)=\sqrt{1+x^4}+\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\sin x$$
而
$$\sqrt{1+x^4}\geqslant 1,0\leqslant\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\leqslant 1,-1\leqslant\sin x\leqslant 1$$

故 $F'(x)\geqslant 0$，即 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加。故结论得证。

（2）设 $f(x)=x^3+px+q$，由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 可知至少有一个实根。

假设有两个实根 x_1,x_2，则由 $f(x_1)-f(x_2)=0$ 可推出 $x_1-x_2=0$。

例 6.12　证明下列各题

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$f(0)<0$，对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 有 $f'(x)>2$，证明方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(0,\dfrac{|f(0)|}{2}\right)$ 中有且仅有一个根。

（2）证明对任意自然数 n，方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 在区间 $(0,1)$ 内总有唯一一个实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

证明　（1）记 $b=f(0)<0$，因为函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续及 $f'(x)>2$，所以当 $x>0$ 时 $\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t>\int_0^x 2\mathrm{d}t$，即 $f(x)>2x+b$。

又因为 $f(0)<0$，所以

$$f\left(\frac{|f(0)|}{2}\right)=f\left(-\frac{b}{2}\right)>2\cdot\left(-\frac{b}{2}\right)+b=0$$

故由根的存在定理知，方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(0,\dfrac{|f(0)|}{2}\right)$ 中至少有一个根，再由 $f'(x)>2>0$ 知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增，从而唯一性得证。

（2）设　$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$

则
$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=n-1\geqslant 0, x\in[0,1]$$

若 $f(1)=0$，则 $f(x)$ 的零点为 $x=1$，若 $f(1)>0$，则由根的存在定理知，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个零点。

又
$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0, x\in(0,1)$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格递增，从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一零点。即方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 在 $(0,1)$ 上总有唯一一个实根 x_n，因此 ${x_n}^n+{x_n}^{n-1}+\cdots+x_n=1$，即 $\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$，两边令 $n\to\infty$，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$。由 $x_n\in(0,1)$ 知 $\dfrac{l}{1-l}=1$，得 $l=\dfrac{1}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$$

3．确定方程根的个数与方位

例 6.13　试确定方程 $\mathrm{e}^x=ax^2, a>0$ 的根的个数，并指出每个根所在的范围。

解　按惯例，应令 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$，通过讨论函数 $f(x)$ 的性态，确定方程的根。但由于 $f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，难以求出函数 $f(x)$ 的驻点，导致后续解题步骤都无法实现。然而，注意到 $x=0$ 不是方程 $\mathrm{e}^x=ax^2$ 的根，可将方程做恒等变形（两端同乘以 $\dfrac{1}{x^2}$），

得一与之同根的方程 $x^{-2}e^x = a$，而在对 $x^{-2}e^x = a$ 的讨论中克服了上述困难，故只需确定 $x^{-2}e^x = a$ 的根即可。

设 $f(x) = x^{-2}e^x - a$，则函数 $f(x)$ 的零点即方程 $e^x = ax^2$ 的根。

令 $f'(x) = x^{-2}e^x\left(1-\dfrac{2}{x}\right) = 0$，解得函数 $f(x)$ 的驻点为 $x = 2$。当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时，$f'(x) > 0$，故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 与 $[2, +\infty)$ 上单调增加；当 $0 < x < 2$ 时，$f'(x) < 0$，故 $f(x)$ 在区间 $(0, 2]$ 上单调减少。

易知
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}（x^{-2}e^x - a）= -a < 0,$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}（x^{-2}e^x - a）= +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}（x^{-2}e^x - a）= +\infty，且 f(2) = \frac{e^2}{4} - a$$

因此可得以下结论：

① 若 $0 < a < \dfrac{e^2}{4}$，则 $f(2) > 0$，从而 $f(x)$ 只有一个零点，且在 $(-\infty, 0)$ 内。

② 若 $a = \dfrac{e^2}{4}$，则 $f(2) = 0$，从而 $f(x)$ 有两个零点，一个是 $x = 2$，另一个在 $(-\infty, 0)$ 内。

③ 若 $a > \dfrac{e^2}{4}$，则 $f(2) < 0$，从而 $f(x)$ 有三个零点，且依次在 $(-\infty, 0)$，$(0, 2)$ 与 $(2, +\infty)$ 内。

例 6.14 讨论方程 $\ln x = \dfrac{x}{e} - 2\sqrt{2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内根的情况。

解 设
$$f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 2\sqrt{2}$$

则 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e}$，令 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e} = 0$ 得 $x = e$，当 $0 < x < e$ 时 $f'(x) > 0$，当 $x > e$ 时 $f'(x) < 0$，故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调增加，在 $(e, +\infty)$ 上单调减少。

从而 $f(x)$ 在 $(0, e)$、$(e, +\infty)$ 上分别最多有一个根存在。

又
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, f(e) = 2\sqrt{2} > 0, \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

故 $f(x)$ 在 $(0, e)$、$(e, +\infty)$ 上分别至少有一个根存在。

总之，$f(x)$ 在 $(0, e)$、$(e, +\infty)$ 上分别有唯一一个根存在，即方程 $\ln x = \dfrac{x}{e} - 2\sqrt{2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有两个根。

例 6.15 确定方程 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 15 = 0$ 的实根个数。

解 令 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$，则 $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$，令 $f'(x) = 0$ 得极值点 $x_1 = -1, x_2 = 2$，无不可导点。

在 $(-\infty,-1)$ 上有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=22>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上至少有一个根，而在 $(-\infty,-1)$ 上 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上有且只有一个根。

用同样的方法，可以判断出 $f(x)$ 在 $(-1,2),(2,+\infty)$ 上也有且只有一个根。

故方程 $2x^3-3x^2-12x+15=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有且只有三个实根。

4．函数的不动点或零点问题

例 6.16　证明下列各题：

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任意的 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)\in[a,b]$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个不动点。

（2）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且 $f[f(x)]=x$，证明 $f(x)$ 存在不动点。

（3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=1$，证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=\xi$。

证明　（1）设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(a)=f(a)-a\geqslant 0$，$F(b)=f(b)-b\leqslant 0$。

若 $F(a)=0,则 f(a)=a$，即 a 为 $f(x)$ 的不动点。

若 $F(b)=0,则 f(b)=b$，即 b 为 $f(x)$ 的不动点。

若 $F(a)>0$，$F(b)<0$，则由根的存在性定理知，在 (a,b) 内至少有一个点 x_0，使 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$，亦即 x_0 为 $f(x)$ 的不动点。

综上所述，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个不动点。

（2）设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，从而在 $[x,f(x)]$ 或 $[f(x),x]$ 上连续，由 $f[f(x)]=x$ 得

$$F(x)=f(x)-x，\quad F[f(x)]=f[f(x)]-f(x)=x-f(x)$$

若 $f(x)-x=0$，则结论得证。

若 $f(x)-x\neq 0$，则 $F(x)\cdot F[f(x)]=-[f(x)-x]^2<0$，由根的存在性定理知，在 $(x,f(x))$ 或 $(f(x),x)$ 内至少存在一点 ξ，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$，从而结论得证。

（3）由于 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=1$，并考虑到 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$，所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$。

令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续，且

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0，\quad g(1)=f(1)-1=-1<0$$

由根的存在定理知，存在 $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\subset(0,1)$ 使 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

例 6.17　证明下列命题：

（1）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数，证明：存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f\left(\xi+\dfrac{T}{2}\right)=f(\xi)$；

（2）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 1 为周期的连续函数，证明：存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$；

（3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明：对任意自然数 n，存在 $\xi\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$，使 $f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)=f(\xi)$；

（4）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明：对任意自然数 n，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)=f(\xi)+\dfrac{1}{n}$。

证明　（1）设 $g(x)=f\left(x+\dfrac{T}{2}\right)-f(x)$，则 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{T}{2}\right]$ 上连续，且

$$g(0)=f\left(\frac{T}{2}\right)-f(0),g\left(\frac{T}{2}\right)=f(T)-f\left(\frac{T}{2}\right)=f(0)-f\left(\frac{T}{2}\right)$$

若 $f(0)=f\left(\dfrac{T}{2}\right)$，则存在 $\xi=0$ 或 $\xi=\dfrac{T}{2}$，使得 $f\left(\xi+\dfrac{T}{2}\right)=f(\xi)$。

若 $f(0)\neq f\left(\dfrac{T}{2}\right)$，则 $g(0)\cdot g\left(\dfrac{T}{2}\right)<0$，故由根的存在性定理得，存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{T}{2}\right)$ 使得 $g(\xi)=0$，即 $f\left(\xi+\dfrac{T}{2}\right)=f(\xi)$。

（2）因 $f(x)$ 为连续函数，故由最值性定理知，$f(x)$ 在一个周期 $[0,1]$ 上存在最大值点 x_1 和最小值点 x_2。

设 $g(x)=f(x+\pi)-f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$g(x_1)=f(x_1+\pi)-f(x_1)\leqslant 0,\quad g(x_2)=f(x_2+\pi)-f(x_2)\geqslant 0$$

若 $g(x_1)=0$，则存在 $\xi=x_1$，使得 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$。

若 $g(x_2)=0$，则存在 $\xi=x_2$，使得 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$。

若 $g(x_1)<0$，$g(x_2)>0$，则由根的存在性定理得，存在 ξ 使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$。

（3）设 $g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)$，显然 $g(x)$ 在 $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ 上连续，且

$$g(0)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$g\left(\frac{2}{n}\right)=f\left(\frac{3}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$g\left(1-\frac{2}{n}\right)=f\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$g\left(1-\frac{1}{n}\right)=f(1)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

相加得　$$g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+g\left(1-\frac{2}{n}\right)+g\left(1-\frac{1}{n}\right)=f(1)-f(0)=0$$

这说明上面的 n 个等式要么全为 0，得证；要么有两项反号，此时根据根的存在性定理得证。

（4）设 $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)-\frac{1}{n}$，显然 $g(x)$ 在 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 上连续，且

$$g(0)=f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$$

$$g\left(\frac{2}{n}\right)=f\left(\frac{3}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}$$

$$\vdots$$

$$g\left(1-\frac{2}{n}\right)=f\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}$$

$$g\left(1-\frac{1}{n}\right)=f(1)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$$

相加得　$$g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+g\left(1-\frac{2}{n}\right)+g\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-1=0$$

类似上题，可得证。

例 6.18　证明下列命题：

（1）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，证明：对任意区间 (a,b)，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi)$，其中 $p,q>0$；

（2）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且函数值变号，证明：存在等差数列 $a<b<c$，使得 $f(a)+f(b)+f(c)=0$；

（3）设 $f(x),g(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续非负函数，且 $\sup\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=\sup\limits_{x\in[0,1]}\{g(x)\}$，证明存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f^2(\xi)+3f(\xi)=g^2(\xi)+3g(\xi)$。

证明　（1）设　$F(x)=(p+q)f(x)-pf(a)-qf(b)$

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)F(b)=-pq[f(a)-f(b)]^2<0$$

故由根的存在性定理得，存在$\xi\in(a,b)$使得$F(\xi)=0$，即

$$pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi)$$

（2）因函数值变号，故可设在点x_1处有$f(x_1)>0$，在点x_2处有$f(x_2)<0$，由$f(x)$的连续性知，存在x_1的邻域$U(x_1)$，使得当$x\in U(x_1)$时有$f(x)>0$，当然可在$U(x_1)$内找到等差数列$a_1<b_1<c_1$，使得

$$f(a_1)+f(b_1)+f(c_1)>0$$

同样，存在x_2的邻域$U(x_2)$，使得当$x\in U(x_2)$时有$f(x)<0$，当然可在$U(x_2)$内找到等差数列$a_2<b_2<c_2$，使得$f(a_2)+f(b_2)+f(c_2)<0$。

对$t\in[0,1]$，取等差数列

$$a(t)=a_1(1-t)+a_2t,\quad b(t)=b_1(1-t)+b_2t,\quad c(t)=c_1(1-t)+c_2t$$

令$F(t)=f[a(t)]+f[b(t)]+f[c(t)]$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0)>0,F(1)<0$。

故由根的存在性定理得，存在$t_0\in(0,1)$使得$F(t_0)=0$，即得所证！

（3）设α,β各为$f(x),g(x)$在$[0,1]$上的最大值点，且记

$$f(\alpha)=\sup_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=g(\beta)=\sup_{x\in[0,1]}\{g(x)\}=M$$

设$F(x)=f(x)-g(x)$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且

$$F(\alpha)=M-g(\alpha)\geqslant 0,F(\beta)=f(\beta)-M\leqslant 0$$

若$F(\alpha)=0$或$F(\beta)=0$，则取$\xi=\alpha$或$\xi=\beta$使得$F(\xi)=0$。

若$F(\alpha)>0,F(\beta)<0$，则由根的存在性定理得，存在$\xi\in(0,1)$使得$F(\xi)=0$。

综上所述，存在$\xi\in[0,1]$使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=g(\xi)$，从而

$$f^2(\xi)+3f(\xi)=g^2(\xi)+3g(\xi)$$

例 6.19 设函数f在$[0,2a]$上连续，且$f(0)=f(2a)$证明：存在一点$x_0\in[0,a]$，使得$f(x_0)=f(x_0+a)$。

证明 设$F(x)=f(x)-f(x+a)$，由于$f(x)$在$[0,2a]$上连续，故$f(x+a)$在$[0,a]$上连续，于是$F(x)$在$[0,a]$上连续，且

$$F(0)=f(0)-f(a),F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$$

（I）若$f(0)=f(a)$，则$x=0$，a均是使得$f(x)=f(x+a)$成立的x；

（II）若$f(0)\neq f(a)$，则$F(0)\cdot F(a)<0$，由根的存在性定理可知，存在$x\in(0,a)$，使得$F(x)=0$，即$f(x)=f(x+a)$。

由（I）（II）知结论成立。

5．与微分中值定理结合使用，证明方程存在根或函数存在零点

例 6.20 证明下列各题：

（1）证明方程$2^x-x^2-1=0$有且仅有三个不同的实根；

（2）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导且$f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，又$f(x_0)<0$，证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有且仅有两个零点。

证明　（1）设 $f(x)=2^x-x^2-1$，因 $f(0)=f(1)=0$，所以 $x=0,x=1$ 为方程的两个根；又 $f(3)<0,f(5)>0$，所以由零点存在定理知，方程在 $(3,5)$ 内至少有一个根 ξ。

假设还有根 ξ_1，不妨设 $\xi_1<\xi$，函数 $f(x)=2^x-x^2-1$ 在 $[0,1],[1,\xi],[\xi,\xi_1]$ 上都满足罗尔定理，可得 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=f'(\eta_3)=0$。又因 $f'(x)=2^x\ln 2-2x$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$，$[\eta_2,\eta_3]$ 上满足罗尔定理，可得 $f''(\zeta_1)=f''(\zeta_2)=0$，即方程 $f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2=0$ 有两个实根，与事实矛盾！

（因方程 $f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2=0$ 只有一个实根 $x=\dfrac{\ln 2-2\ln(\ln 2)}{\ln 2}$）。

（2）由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,$ 知 $\exists A>x_0$，$\forall x>A$ 有 $f'(x)>\dfrac{\alpha}{2}$。

由拉格朗日中值定理得

$$f(x)-f(A)=f'(\xi)(x-A)>\frac{\alpha}{2}(x-A),\quad a<\xi<x$$

所以

$$f(x)>f(A)+\frac{\alpha}{2}(x-A)$$

从而 $\exists x_1>A$ 使 $f(x_1)>0$，又 $f(x_0)<0$，故由零点存在定理知，$\exists\xi_1\in(x_0,x_1)$ 使 $f(\xi_1)=0$。

同上可证 $\exists\xi_2\in(-\infty,x_0)$ 使 $f(\xi_2)=0$。

用反证法可证只有两个根（否则与 $f''(x)>0$ 矛盾）。

例 6.21　设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，当 $x>a$ 时 $f'(x)>k>0$，其中 k 为常数，又 $f(a)<0$，证明方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a+\dfrac{|f(a)|}{k}\right)$ 内有唯一实根。

证明　由 $f'(x)>k>0$ 知递增，因此至多有一个实根；又由拉格朗日中值定理得

$$f\left(a+\frac{|f(a)|}{k}\right)=f(a)+f'(\xi)\frac{|f(a)|}{k}>f(a)+k\frac{|f(a)|}{k}=f(a)+|f(a)|>0$$

而 $f(a)<0$，故由零点存在定理知至少有一个实根。从而得证。

例 6.22　设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)>0,f'(a)<0$，当 $x>a$ 时 $f''(x)\leqslant 0$，证明：在 $[a,\infty)$ 内，方程 $f(x)=0$ 有且只有一个实根。

证明　由 $f'(a)>0,f''(x)<0,$ 得 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 递减，又

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，且 $f(a)>0$，所以 $f(x)$ 必有零点，又因 $f(x)$ 递减，所以有且仅有一个零点。

6.5.4　介值性定理的应用

例 6.23　设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots x_n\in[a,b]$。证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$

证明 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 f 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上限得最大值 M 与最小值 m，于是对任意 $x\in[x_1,x_n]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 从而

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M$$

设 $x',x''\in[x_1,x_n]$，使得 $f(x')=M$，$f(x'')=m$，不妨设 $x'<x''$，由介值性定理得，存在 $\xi\in[x',x'']\subset[x_1,x_n]$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

例 6.24 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，另有一组正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，证明：存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$$

证明 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以存在最大值 M 与最小值 m。

令 $$m'=\min\{f(x_1,),f(x_2),\cdots,f(x_n)\},M'=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$$

则 $$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\leqslant\lambda_1 M'+\lambda_2 m'+\cdots+\lambda_n M'=M'$$

$$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\geqslant\lambda_1 m'+\lambda_2 m'+\cdots+\lambda_n m'=m'$$

于是 $$m\leqslant m'\leqslant\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\leqslant M'\leqslant M$$

由介值定理，必存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$$

例 6.25 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且递增，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$$

证明 做辅助函数 $F(x)=f(a)(x-a)+f(b)(b-x)$

则 $F(x)$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)=f(b)(b-a),F(b)=f(a)(b-a)$$

又因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，故对任意的 $x\in[a,b]$，有 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$；从而由定积分的性质得

$$f(a)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)(b-a)$$

即 $$F(b)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant F(a)$$

由闭区间上连续函数的介值定理得，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(\xi)=f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$$

例 6.26 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且非常数，证明函数值集合 $\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ 是一个闭区间 $[m,M]$，其中 m,M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值。

证明 只需证明 $\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=[m,M]$。

一方面，对任何 $x\in[a,b]$ 有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，即 $\{f(x)\mid x\in[a,b]\}\subset[m,M]$；另一方面，由介值定理知，$\forall\xi\in[m,M]$，$\exists x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)=\xi$，即 $\{f(x)\mid x\in[a,b]\}\subset[m,M]$。

例 6.27　若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A<B=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则 $\forall\eta\in(A,B)$，$\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f(\xi)=\eta$。

证明　取 ε 使 $A+\varepsilon<\eta<B-\varepsilon$，由已知极限得，$\exists X_1<0$ 使 $f(X_1)<A+\varepsilon$；$\exists X_2>0$ 使 $f(X_2)>B-\varepsilon$，在 $[X_1,X_2]$ 上用介值定理即得。

6.5.5　一致连续性定理的应用

例 6.28　设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$，证明：$\varphi(x)$ $[a,+\infty)$ 上一致连续。

证明　因 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists M>a$，当 $x>M$ 时，有 $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$。又因 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；因此，当 $x'>M,x''>M$，$|x'-x''|<\delta_1$ 时有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant|\varphi(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')|+|f(x'')-\varphi(x'')|<3\varepsilon$$

又由 Cantor 定理知 $\varphi(x)$ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$，当 $x',x''\in[a,M+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有 $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon$。

取 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$，则对任意的 $x',x''\in[a,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

故 $\varphi(x)$ $[a,+\infty)$ 上一致连续。

例 6.29　证明有限区间上的一致连续函数一定有界。

证明　分别证明闭区间 $[a,b]$，开区间 (a,b)，半开半闭区间 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 上的一致连续函数有界。

（1）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\forall x'$ 有 $\lim\limits_{x\to x'}f(x)=f(x')$。故 $\exists\delta_{\dot{x}}$，当 $x\in U(\dot{x},\delta_{\dot{x}})\bigcap[a,b]$ 时，$|f(x)|\leqslant M_{\dot{x}}$，$M_{\dot{x}}>0$，又 $E=\{U(\dot{x},\delta_{\dot{x}})\,|\,\dot{x}\in[a,b]\}$ 是 $[a,b]$ 的一个覆盖，由有限覆盖定理知，$\exists U(x_i,\delta_{xi})\in E$，$(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U(x_i,\delta_{x_i})$。

取 $M=\max\{M_{x_1},M_{x_2},\cdots M_{x_i}\}$，则有 $|f(x)|\leqslant M$，$\forall x\in[a,b]$。于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

（2）$f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，则 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在。

于是 $F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x), & x=a\\ f(x), & a<x<b\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x), & x=b\end{cases}$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，所以在 $[a,b]$ 上有界，当然在 (a,b) 内有界，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界。

（3）$f(x)$ 在 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 内一致连续，仿上可证得 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 上有界。证毕。

例 6.30 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对任何 $x\in[0,1]$ 有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+n)=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证明 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y$ 满足 $|x-y|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

现在 $[0,1]$ 上取有限点 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 使 $\forall x\in[0,1],\exists x_i$，有 $|x-x_i|<\delta$ 成立，则 $\forall x>1$ 时，$\exists n\in N$ 使 $|x-(x_i+n)|<\delta$ 成立，所以 $|f(x)-f(x_i+n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。又因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+n)=0$，所以 $\forall\varepsilon<0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N$ 时，有 $|f(x_i+n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立。

于是对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$，当 $x>N$ 时有

$$|f(x)|=|f(x)-f(x_i+n)+f(x_i+n)|$$

$$<|f(x)-f(x_i+n)|+|f(x_i+n)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。证毕。

例 6.31 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证明 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$，则$\exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x_1>X$，使得$|f(x_1)|\geqslant 2\varepsilon_0$。由于 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是一致连续的，对于 $\varepsilon=\varepsilon_0>0,\exists\delta>0,|x''-x'|\leqslant\delta$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0$，于是，$\forall X>a,\exists x_1>X$，$x_1<x\leqslant x_1+\delta$ 时有 $|f(x)|>|f(x_1)|-\varepsilon_0\geqslant\varepsilon_0$ 且 $f(x)$ 在此区间上不变号，这说明存在正数 $\varepsilon'=\varepsilon_0\delta,\forall X>a,\exists x_1,x_1+\delta>X$ 使得 $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0\delta$，由柯西准则知，$\int_n^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。与题设矛盾。证毕。

例 6.32 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，则存在非负常数 a，b，使得 $|f(x)|\leqslant a|x|+b$。

证明 f 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对任意 $x',x''\in R$，$|x'-x''|<\delta$ 时，都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

现固定 ε,δ,x_0，$\forall x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{Z}$ 使

$$x=n\delta+x_0,x_0\in(-\delta,+\delta),$$

$$f(x)=\sum[f(k\delta+x_0)-f[(k-1)\delta+x_0]]+f(x_0),$$

$$f(x)\leqslant\sum[f(k\delta+x_0)-f[(k-1)\delta+x_0]]+|f(x_0)|\leqslant|n|\varepsilon+M$$

由 $$x=n\delta+x_0\,|n|=\left|\frac{x-x_0}{\delta}\right|,f(x)\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta}|x-x_0|+M\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta}|x|+\left(M+\frac{\varepsilon}{\delta}|x_0|\right)$$

令 $a=\dfrac{\varepsilon}{\delta},b=M+\dfrac{\varepsilon}{\delta}|x_0|$，即 $|f(x)|\leqslant a|x|+b$。证毕。

例 6.33 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的区间 I 上一致连续，则

（1） $f(x)\pm g(x)$ 在 I 上一致连续；

（2）c 为常数，则 $cf(x)$ 在 I 上一致连续；

（3）若 $f(x),g(x)$ 有界， $f(x)g(x)$ 在 I 上一致连续且有界；

（4） $f(x)$ 在 I 上有界，又存在 $a>0$，使对任 $x\in I$ ，都有 $|g(x)|\geqslant a$ 成立，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 I 上一致连续且有界。

证明 （1）$\forall\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 X 上一致连续，所以 $\exists\delta>0$，当 x'，$x''\in X$，$|x'-x''|<\delta$ 时。恒有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立，从而恒有

$$|[f(x')\pm g(x')]-[f(x'')\pm g(x'')]|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$$

依定义， $f(x)\pm g(x)$ 在 X 上一致连续。证毕。

（2）若 $c=0$，则 $cf(x)=0$，当然在 I 上一致连续。

若 $c\neq 0$，则 $|c|>0$，且对任意 $x',x''\in I$，都有 $|cf(x')-cf(x'')|=|c||f(x')-f(x'')|$ 成立。而 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，所以， $cf(x)$ 在 I 上一致连续。证毕。

（3）$f(x)$与$g(x)$ 均在区间 I 上有界，则 $\exists M>0$，使对 $\forall x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，$|g(x)|\leqslant M$ 成立。

由于 $f(x)$与$g(x)$ 均在区间 I 上一致连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对任意 $x',x''\in I$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2M},|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

对任意 $x',x''\in I$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\leqslant|f(x')||g(x')-g(x'')|+|g(x'')||f(x')-f(x'')|$$

$$<M\frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

所以， $f(x)g(x)$ 在 I 上一致连续。又 $\forall x\in I$，都有

$$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|\leqslant M^2$$

所以 $f(x)g(x)$ 在 I 上有界。证毕。

（4） $\forall\varepsilon>0$，由已知，$\exists\delta>0$，使当 $x',x''\in I$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，恒有 $|g(x')-g(x'')|<a^2\varepsilon$ 成立。

于是，当 $x',x''\in I$ 和 $|x'-x''|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{1}{g(x')}-\frac{1}{g(x'')}\right|=\frac{|g(x')-g(x'')|}{|g(x')||g(x'')|}<\varepsilon$$

依定义，$\dfrac{1}{g(x)}$ 在 I 上一致连续。$\dfrac{1}{g(x)}$ 在 I 上有界是显然的。

再由（3）知，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 I 上一致连续且有界。

例 6.34 设 $f(\mu)$ 在区间 U 上一致连续，而 $g(x)$ 在区间 I 上一致连续，且

$\{g(x): x\in I\}\subset U$，则复合函数 $f(g(x))$ 在 I 上一致连续。

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$，使当 $\mu',\mu''\in U$ 且 $|\mu'-\mu''|<\eta$ 时，恒有 $|f(\mu')-f(\mu'')|<\varepsilon$ 成立。对这个 $\eta>0,\exists\delta>0$，使当 $x',x''\in I$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，恒有 $g(x')\in\overline{U}$，$g(x'')\in U$，且 $|g(x')-g(x'')|<\eta$，所以有 $|f(g(x'))-f(g(x''))|<\varepsilon$。依定义，$f(g(x))$ 在 I 上一致连续。

例 6.35 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明函数 $M(x)=\max\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上也连续。

证明 由闭区间上连续函数的最值性定理知，$M(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，所以当 $x,x+\Delta x\in[a,b]$ 且 $\Delta x>0$ 时，有

$$|M(x+\Delta x)-M(x)|=M(x+\Delta x)-M(x)\leqslant\max_{t\in[a,x+\Delta x]}\{f(t)\}-\max_{t\in[a,x]}\{f(t)\}=\omega_f$$

又由一致连续性定理知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，于是 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<\Delta x<\delta$ 时，对任意的 $x\in[a,b)$ 有 $\omega_f<\varepsilon$，即 $M(x)$ 在点 x 右连续。

同理可证 $M(x)$ 在点 $x\in(a,b]$ 左连续。证毕。

参 考 文 献

[1] 敏志奇．闭区间上连续函数性质统一的值域定理．甘肃高师学报，2004，9（5）．
[2] 邓朝阳，吴泽民．非连续函数的介值定理．泉州师范学院学报（自然科学），2007，（7）．
[3] 金城．零点存在定理的推广及其在解不等式中的应用．中国校外教育，2010，（5）．
[4] 邹宗兰．零点存在定理的两个应用．四川职业技术学院学报，2004，（4）．
[5] 王玉宝，等．零点定理的活用．长春师范学院学报（自然科学版），2007，（2）．
[6] 何艳玲，等．任意区间上连续函数的零点定理．宜春学院学报，2006，（2）．
[7] 殷承虹．零点存在定理的拓广及其应用．科技信息，2010，（14）．
[8] 贾彩军．根的存在定理的推广及其应用．襄樊职业技术学院学报，2009，8（3）．
[9] 林远华．对函数一致连续性的几点讨论．河池师专学报，2003，（12）．
[10] 杨峻，何胡兵．函数一致连续性的判定．安阳师范学院学报，2006，（5）．
[11] 徐伟．一致连续函数的探讨．科技信息，2011，（30）．
[12] 刘勇．关于一元函数一致连续性的讨论．赤峰学院学报：自然科学版，2009，25（11）．
[13] 高庆武．基于康托定理对函数一致连续性的进一步探讨．科教导刊，2012，（36）．
[14] 孙兰敏．非有限闭区间上连续函数最值的存在性．衡水学院学报，2007，9（1）．
[15] 高丽．非闭区间上连续函数的最值定理．高师理科学刊，2008，（5）．
[16] 邹慧超．一般区间上连续函数的性质．烟台师范学院学报：自然科学版，2002，18（4）．
[17] 张国富．紧集上的连续函数性质是闭区间上连续函数性质的拓广．承德民族师专学报，2001，21（2）．
[18] 缪彩花．非闭区间上连续函数的性质．科技信息，2012，（6）．

[19] 夏丹，夏军．闭区间上连续函数的性质推广．广西右江民族师专学报，2005，(12)．
[20] 温丽萍．闭区间上连续函数性质的再推广．高等函授学报：自然科学版，2007，(3)．
[21] 夏丹．闭区间上连续函数性质的推广．高等函授学报：自然科学版，2006，(3)．
[22] 郭玉立．闭区间上连续函数性质的推广．广西民族学院学报：自然科学版，2004，(1)．
[23] 何灵．试用 Wierstrass 定理证明闭区间连续函数的性质．西南民族学院学报，1995，(1)．
[24] 张小霞．连续函数零点存在定理的新证明．曲阜师范大学学报：自然科学版，1996，(1)．
[25] 徐培芬，张达寿．零点定理的两个新证明．天津商学院学报，1990，(3)．
[26] 郑智刚．函数的介值性与连续性．石家庄铁路工程职业技术学院学报，2004，(6)．
[27] 包素华．关于介值定理的进一步探讨．上饶师专学报，1998，(6)．
[28] 郭计敏．介值性定理的证明及应用．科技信息，2009，(23)．
[29] 朱乐敏，黄迅成，王元明．从连续到间断——关于介值定理的推广．大学数学，2006，(2)．
[30] 邓朝阳，吴泽民．非连续函数的介值定理．泉州师范学院学报：自然科学，2007，(7)．
[31] 德力．关于介值定理和中值定理的推广．内蒙古教育学院学报，1994，(12)．
[32] 吴健辉．介值定理的推广．景德镇高专学报，1999，(4)．
[33] 李荣祥．浅谈闭区间上连续函数性质的证明．惠州师专学报，1987，(1)．
[34] 张杰．关于一致连续函数的几个问题．包头职业技术学院学报，2008，(4)．
[35] 韩仲明．函数的一致连续性分析．内江科技，2009，(5)．
[36] 江叶．康托定理的另一证明．吉首大学学报，1983，(1)．
[37] 林木元．一致连续性定理的若干证法．广西教育学院学报，2007，(4)．
[38] 陈练寒．关于 Cantor 定理的新证法．武汉水利电力大学（宜昌）学报，1999，(2)．

第 7 章　实数连续性（完备性）定理

数学分析是在实数集上用极限方法来研究函数性质的，极限理论是数学分析的基础，而极限理论的基础是实数集的连续性。实数集的连续性是实数集有别于有理数集的重要性质，实数集的连续性是很难刻画的，我们可以直观地给出一种描述性的刻画：实数集不但稠密且实数间无“空隙”，它和连续不断的数轴上的点一一对应。在极限理论下，可以用“实数集具有极限运算的封闭性”，或者说“用实数集 R 中的实数构成基本数列所能得到的集合仍然是由有理数基本数列全体形成的 R 本身”，来刻画实数集的连续性（完备性）。

实数连续性（完备性）定理就是以不同形式、从不同侧面来刻画（反映）实数集的这一特有性质的，实数连续性（完备性）定理构成了极限理论的理论基础。实数连续性（完备性）定理一般是指确界存在定理、单调有界定理、柯西收敛准则、区间套定理、魏尔斯特拉斯（Weierstrass）聚点定理、波尔查诺（Bolzano）致密性定理、海涅-波莱尔（Heine-Borel）有限覆盖定理。有的文献中还包括戴德金（Dedekind）分划定理（也称为实数基本定理）、界点定理，戴德金分划定理与界点定理本章不再探讨，有兴趣的读者可查看相关文献。

7.1　实数连续性定理的历史演变

在整个 19 世纪，连续的概念是人们研讨的对象，数学家们为了严密地建立分析而进行着艰难的尝试，就要求人们证明许多原先已经被直观地接受了的有关连续函数的定理。

波尔查诺在他 1817 年的出版物《关于方程在每两个给出相反结果的值之间至少有一个实根的定理的纯粹分析的证明》（也译成《下述定理的纯分析证明——在使得函数取相反（符号）值的每两个变量之间，至少存在函数的一个零点》）中，证明了如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为负而在 $x=b$ 处为正，则 $f(x)$ 在 a 和 b 处之间有一个零点（零点存在定理），他对固定的 x 考虑函数序列 $F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x),\cdots$，而且引入了这样的定理：

如果 n 充分大，可使差数 $F_{n+r}(x)-F_n(x)$ 对于无论多大的 r 都小于任何给定的正数，则存在一个固定的量 X，使得这个序列越来越靠近 X，而且确实如人们所想要的那样靠近 X。

他对量 X 的确定是含糊的，因为他没有一个清楚的实数系的理论，尤其是不清楚作为实数系基础的无理数的理论，然而他已经有了序列收敛的柯西条件的思想，

由于波尔查诺在数学界的地位不高，他的工作没有引起人们的注意，他的思想未得到及时传播，历史上，把关于序列收敛条件的正确概念归功于柯西（柯西收敛准则），直到 1823 年，柯西才给出了“柯西收敛准则”。

波尔查诺在证明的过程中，建立了我们现在所说的确界存在定理，他确切地陈述了有界实数集的最小上界（即上确界）的定义，他在证明中所采用的方法就是我们现在所说的区间套方法（区间套定理），他的确切陈述是：如果性质 M 不能适用于变量 x 的所有的值，但对于所有小于某个 u 的值性质 M 成立，则总存在一个量 U，它是所有这样的量 u 的最大值。其实质在于把有界区间分成两部分，而选取包含集合的无穷多个元素的那一部分，然后重复这一手续，直到得到给定实数集的最小上界才停止。

利用波尔查诺的思想，魏尔斯特拉斯（Weierstrass）在 19 世纪 60 年代证明了现在冠以魏尔斯特拉斯–波尔查诺名字的定理（聚点定理）：对于任何有界无穷点集，存在一个点，使得该点的任何邻域内都有这无穷点集的点，有界数列必有收敛子列（致密性定理）也是魏尔斯特拉斯提出的。

柯西在他关于多项式的根的存在的证明之一中，已经不加证明地用过定义在闭区间上的连续函数存在最小值，魏尔斯特拉斯 1860 年在他的柏林讲义中证明了“对任何定义在有界闭区域的单变量或多变量的连续函数，存在函数的一个最大值和一个最小值”（闭区间上连续函数的最值性定理）。

有限覆盖定理的历史开始于 19 世纪对实分析的坚实基础的寻觅，理论的中心是一致连续的概念和声称所有闭区间上的连续函数是一致连续的定理，狄利克雷首先证明了它，并隐含地在他的证明中利用了闭区间的给定开覆盖的有限子覆盖的存在性。他在 1862 年的演讲中使用了这个证明，并在 1904 年得以出版。

德国数学家海涅（E.Heine，1821－1881）在康托（Cantor）和魏尔斯特拉斯的思想鼓舞下，于 1870 年定义了单变量或多变量函数的一致连续性，1872 年证明了在实数系的有界闭区间上的连续函数是一致连续的（闭区间上连续函数的一致连续性定理），海涅的方法引进且利用了下述定理：设给定了一个闭区间 $[a,b]$，以及位于 $[a,b]$ 中的所有闭区间构成的一个可数无穷集合 Δ，使得 $a \leqslant x \leqslant b$ 中的每一点 x 至少是 Δ 中一个区间的内点（当 a 是一个区间的左端点而 b 是另一个区间的右端点时，也把端点 a 和 b 看作是内点），则由 Δ 中有限多个区间组成的一个集合具有同样的性质，即闭区间 $[a,b]$ 的每个点至少是这个有限区间集合中的某一区间的一个内点（a 和 b 可能是端点），即我们现在所说的有限覆盖定理。

法国数学家波莱尔（Emile-Borel，1871－1956）清楚地认识到能够选出有限个覆盖区间的重要性，而且对原来的区间集合 Δ 是可数的情形首先叙述为一个独立的定理，1895 年波莱尔首次发表并证明了有限覆盖定理，所以这个定理也叫海涅–波莱尔（Heine-Borel）有限覆盖定理。

波莱尔完善并证明的有限覆盖定理，受限制于可数覆盖，勒贝格在 1898 年提出，1904 年在《积分学教程》中把它推广到了任意覆盖，即可以从一个不可数无穷

集合中选出覆盖区间的一个有限集合的情形。

正如勒贝格所指出的，这个定理的功绩不在于它的证明，而在于认识到这个定理的重要性，而且把它作为一个清楚的定理确切地陈述出来，对于任何维数的闭集合，这个定理都适用，而且现在它已成了集合论中的一个基本定理。

1872 年，实数的三大派理论：戴德金“分划”理论，康托的“基本序列”理论及魏尔斯特拉斯的“有界单调序列”理论，同时在德国出现。1892 年，巴赫曼提出了建立实数理论的一个重要原理——区间套原理。由此，严谨的极限理论与实数理论建立了起来，完成了分析学的逻辑奠基工作，从而使微积分学这座数学史上空前雄伟的大厦建在了牢固可靠的基础之上。

7.2 实数连续性定理的内容与证明

7.2.1 确界存在定理及其证明

定理 7.1（确界存在定理） 非空有上（下）界的数集，必有上（下）确界。

证法一（利用构造性方法证明确界存在定理）

只证非空有上界的数集，必有上确界。不妨设数集 S 含有非负数，由于 S 有上界，故存在非负整数 n，使得对于任何 $x\in S$ 有 $x<n+1$，存在 $a_0\in S$ 使 $a_0\geqslant n$。

对半开区间 $[n,n+1)$ 做十等分，分点为 $n.1$，$n.2$，…，$n.9$，则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_1，使得对于任何 $x\in S$ 有 $x<n.n_1+\dfrac{1}{10}$，存在 $a_1\in S$ 使 $a_1\geqslant n.n_1$。

再对半开区间 $\left[n.n_1,n.n_1+\dfrac{1}{10}\right)$ 做十等分，则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_2，使得对于任何 $x\in S$ 有 $x<n.n_1n_2+\dfrac{1}{10^2}$，存在 $a_2\in S$ 使 $a_2\geqslant n.n_1n_2$。

将上述步骤无限进行下去，得到实数 $\eta=n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$，下面证明 $\eta=\sup S$，为此只需证明：

（i）对任何 $x\in S$ 有 $x\leqslant\eta$；

（ii）对任何 $\alpha<\eta$，存在 $\alpha'\in S$ 使 $\alpha<\alpha'$。

倘若结论（i）不成立，即存在 $x\in S$ 使 $x>\eta$，则可找到 x 的 k 位不足近似 x_k，使 $x_k>\overline{\eta}_k=n.n_1n_2\cdots n_k+\dfrac{1}{10^k}$，其中 $\overline{\eta}_k$ 为 η 的 k 位过剩近似；从而得 $x>n.n_1n_2\cdots n_k+\dfrac{1}{10^k}$，但这与 x 的构造方法矛盾，于是（i）得证。

现设 $\alpha<\eta$，则存在 k 使 η 的 k 位不足近似 $\eta_k>\overline{\alpha}_k$，即 $n.n_1n_2\cdots n_k>\overline{\alpha}_k$，根据 η 的构造，存在 $\alpha'\in S$ 使 $\alpha'\geqslant\eta_k$，从而有 $\alpha'\geqslant\eta_k>\overline{\alpha}_k\geqslant\alpha$，得到 $\alpha<\alpha'$，于是（ii）成立。

定理得证。

证法二（利用单调有界定理证明确界存在定理）

设数集 S 非空有上界，即存在 $a\in S$，不妨设数 a 不是 S 的上界，存在数 b 是 S 的上界。

将区间 $[a,b]$ 二等分：

若中点 $\dfrac{a+b}{2}\in S$，则取 $a_1=\dfrac{a+b}{2},b_1=b$；

若中点 $\dfrac{a+b}{2}\notin S$，则取 $a_1=a,b_1=\dfrac{a+b}{2}$，得小区间 $[a_1,b_1]$。

如此无限继续下去，得两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，其中 $a_n\in S$ 且单调递增有上界 b_1，b_n 单调递减有下界 a_1，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$。

由单调有界定理知存在 ξ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，又由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

因 $\{b_n\}$ 是 S 的上界，所以 $\forall x\in S$ 有 $x\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$，令 $n\to\infty$ 得 $x\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，所以 ξ 为 S 的上界。

而 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$ 知，存在 N，当 $n>N$ 时有 $\xi-\varepsilon<a_n$，即 $\xi-\varepsilon<a_{N+1}$，又对所有的 $a_n\in S$，即存在 S 中的某个数 a_{N+1}，使得 $\xi-\varepsilon<a_{N+1}$，故 ξ 为 S 的最小上界。所以 $\xi=\sup S$。

同理可证非空有下界的数集，必有下确界。

证法三（利用柯西收敛准则证明确界存在定理）

设数集 S 非空有上界，即存在 $a\in S$，不妨设数 a 不是 S 的上界，存在数 b 是 S 的上界。

将区间 $[a,b]$ 二等分：

若中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 是 S 的上界，则取 $a_1=a,b_1=\dfrac{a+b}{2}$；

若中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 不是 S 的上界，则取 $a_1=\dfrac{a+b}{2},b_1=b$，得小区间 $[a_1,b_1]$。

如此无限继续下去，得两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，其中 a_n 不是 S 的上界，b_n 是 S 的上界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$。

下面证明 $\{a_n\}$ 满足柯西收敛准则。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 知 $\forall\varepsilon>0,\exists N,n>N$ 时有 $|b_n-a_n|<\varepsilon$；又 $a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n$，从而 $\forall p$ 有 $|a_{n+p}-a_n|\leqslant|b_n-a_n|<\varepsilon$，故 $\{a_n\}$ 满足柯西收敛准则，从而有极限。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，从而也得到 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

再证明 $\xi=\sup S$。

对任意的 n 和任意的 $x\in S$，因 b_n 是 S 的上界，所以有 $x\leqslant b_n$，令 $n\to\infty$ 得 $x\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，所以 ξ 为 S 的上界。

而 $\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ 知，存在 N，当 $n > N$ 时有 $\xi - \varepsilon < a_n$，即 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$。又对所有的 $a_n \in S$，即存在 S 中的某个数 a_{N+1}，使得 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$，故 ξ 为 S 的最小上界。所以 $\xi = \sup S$。

同理可证非空有下界的数集，必有下确界。

证法四（利用区间套定理证明确界存在定理）

设数集 S 非空有上界，即存在 $a \in S$，不妨设数 a 不是 S 的上界，存在数 b 是 S 的上界。

将区间 $[a,b]$ 二等分：

若中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 是 S 的上界，则取 $a_1 = a, b_1 = \dfrac{a+b}{2}$；

若中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 不是 S 的上界，则取 $a_1 = \dfrac{a+b}{2}, b_1 = b$，得小区间 $[a_1,b_1]$。

如此无限继续下去，得一区间套 $[a_n,b_n]$，其中 a_n 不是 S 的上界、b_n 是 S 的上界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n} = 0$。

故由区间套定理知，存在唯一的一点 ξ，使得 $\xi \in [a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

对任意的 $x \in S$，因 b_n 是 S 的上界，所以有 $x \leqslant b_n$，令 $n \to \infty$ 得 $x \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，所以 ξ 为 S 的上界。

而 $\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ 知，存在 N，当 $n > N$ 时有 $\xi - \varepsilon < a_n$，即 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$，又对所有的 $a_n \in S$，即存在 S 中的某个数 a_{N+1}，使得 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$，故 ξ 为 S 的最小上界。

所以 $\xi = \sup S$。

同理可证非空有下界的数集，必有下确界。

证法五（利用聚点定理证明确界存在定理）

只就非空有上界数集的情况进行证明。设 S 是非空有上界的数集。不妨假设 S 是无穷集合（若 S 是有限集合，那么其中最大数就是它的上确界，定理显然成立）。

又设 M 是 S 的一个上界，如果 $M \in S$ 或者 M 是 S 的聚点（如果 S 有聚点的话），则 $M = \sup S$，定理成立。

因此，下面假设 $M \in S$ 且 M 不是 S 的聚点。

在 S 中任取一 x_0，总有 $x_0 < M$，考虑区间 $[x_0,M]$：

或者 $[x_0,M]$ 上只有 S 的有限多个点，这时定理显然成立；

或者 $[x_0,M]$ 上有 S 的无穷多个点，那么，S 在 $[x_0,M]$ 上的无穷多个点组成一有界的无穷点集。根据聚点原理，S 在 $[x_0,M]$ 上必有聚点。

① 若 S 在 $[x_0,M]$ 上的聚点唯一，定理一定成立

事实上，若这个唯一聚点是 x_0，任取一个 $x_1 \in [x_0,M] \cap S$，则在 $[x_0,M]$ 上只能

有 S 的有限多个点（否则，S 在 $[x_0,M]$ 上还有聚点，这与 S 在 $[x_0,M]$ 上的聚点唯一相矛盾），这时定理成立；

若这个唯一聚点是 $[x_0,M]$ 的内点 ξ，要么 ξ 点的右边没有 S 中的点，这时 $\xi=\sup S$，要么 ξ 点右边还有 S 中的点 x_2，那么在 $[x_2,M]$ 上只能有 S 的有限多个点，其中最大者就是 $\sup S$，定理成立。

② 若 S 在 (x_0,M) 上的聚点不是唯一的

先证明下列结论成立：在 (x_0,M) 内总存在一点 x，使得 S 在 $[x,M]$ 上的聚点有且仅有一个。

假定这个结论不成立，那就是说对 (x_0,M) 内的任意一点 x，或者在 $[x,M]$ 上总没有 S 的聚点，或者在 $[x,M]$ 上总有 S 的多个聚点。

如果前种情况发生，则根据 $x\in(x_0,M)$ 的任意性知 (x_0,M) 内的任何内点都不是 S 的聚点（因为假定有 $\xi\in[x_0,M]$ 是 S 的聚点，则总有 $x_0<x'<\xi<M$，于是 $[x',M]$ 上就有 S 的聚点，这与在 $[x_0,M]$ 内的任意一点 x，$[x,M]$ 上总没有 S 的聚点相矛盾)。与 S 在 (x_0,M) 上的聚点不是唯一的前提相矛盾。

如果后种情况发生，根据 x 的任意性推知 M 必是 S 的聚点，这又与前面“M 不是 S 的聚点”的假设相矛盾。

所以，上述结论必成立。

既然在 (x_0,M) 内总存在一点 x，使得 S 在 $[x,M]$ 上的聚点唯一，那么根据已经证明的的结论，定理成立。故定理证毕。

证法六（利用致密性定理证明确界存在定理）

设 S 是非空有上界的数集，则必有无限多个上界，设 $Q_0=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$ 为 S 的所有有理数上界。令 $x_n=\min\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$，显然 $\{x_n\}\in Q_0$ 且单调递减有下界，显然也有上界。

由致密性定理知，存在 ξ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$。下面证明 $\xi=\sup S$。

（1）如果存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\xi$，则 $\dfrac{x_0-\xi}{2}>0$，所以 $\exists N$，使得 $x_N<\xi+\dfrac{x_0-\xi}{2}=\dfrac{x_0+\xi}{2}<x_0$，而 $x_N\in Q_0$，这与 x_N 为 S 的上界矛盾。

（2）如果存在 $\xi_0>0$，对任意的 $x\in S$ 有 $x\leqslant\xi-\xi_0$，由有理数的稠密性知，存在 $r'\in Q$ 使得 $\xi-\xi_0<r'<\xi$，所以 $\forall x\in S$ 有 $x<r'$，所以 r' 为 S 的一个上界，即 $r'\in Q_0$，这与 $\xi\leqslant x_{n_k}\leqslant r$ 矛盾。

证法七（利用有限覆盖定理证明确界存在定理）

设 S 是非空有上界的数集，A 为 S 的所有上界组成的集合，即 $\forall x\in S,\forall M\in A$ 有 $x\leqslant M$，任取 $x_0\in S$，假设 S 无最小上界，则 $\forall x\in[x_0,M)$ 满足：

（1）x 是 S 的上界时，则必有更小的上界 $x_1<x$，因而有 x 的一个开邻域 Δ_x，其中皆为 S 的上界。

（2）x不是S的上界时，则必有$x_2 \in S, x_2 > x$，使得x的一个开邻域Δ_x，其中皆为S的上界。

所以区间$[x_0, M)$的每一点均存在一个开邻域Δ_x，要么为（1）要么为（2），这些开邻域$\{\Delta_x \mid x \in [x_0, M)\}$组成了闭区间$[x_0, M]$的一个开覆盖，则由有限覆盖定理知，存在有限覆盖$\{\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \cdots, \Delta_{x_k}\}$覆盖$[x_0, M]$。所以$M$属于（1）所述的开区间，相邻接的邻域$\Delta_{x_k}$有（1）所述的公共点，依此类推，经过有限次的邻域后，得x_0也应属于（1）所述的区域矛盾。

7.2.2 单调有界定理及其证明

定理 7.2（单调有界定理） 递增有上界数列必有极限，递减有下界数列必有极限。

证法一（利用确界存在定理证明单调有界定理）

只证递增有上界数列必有极限的情形。不妨设$\{x_n\}$为递增有上界数列。

构造数集$E = \{x_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$，由确界存在定理知$\{x_n\}$有上确界，记$\xi = \sup\{x_n\}$。下面证明$\xi$就是$\{x_n\}$的极限。

$\forall \varepsilon > 0$，由上确界的定义（ii）知，存在数列$\{x_n\}$的某一项x_N使$x_N > \xi - \varepsilon$，又$\{x_n\}$递增，故当$n > N$时，有$x_n \geqslant x_N > \xi - \varepsilon$，再由上确界的定义（i）知$x_n \leqslant \xi < \xi + \varepsilon$，故$\exists N$，当$n > N$时 有$\xi - \varepsilon < x_n < \xi + \varepsilon$，即$|x_n - \xi| < \varepsilon$，$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$。

同理可证，递减有下界数列必有极限，且极限值就是它的下确界。

证法二（利用柯西收敛准则证明单调有界定理）

只证递增有上界数列必有极限的情形。不妨设$\{x_n\}$为递增有上界数列，下面用反证法证明数列$\{x_n\}$有极限。

假设$\{x_n\}$不存在极限。由柯西收敛准则知，$\exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall N$，$\exists n > N$，使得$x_n - x_N = | x_n - x_N | > \varepsilon_0$。

依次取$N_1 = 1$，$\exists n_1 > N_1$使得$x_{n_1} - x_1 > \varepsilon_0$；

$$N_2 = n_1，\ \exists n_2 > n_1 \text{ 使得 } x_{n_2} - x_{n_1} > \varepsilon_0；$$

$$\vdots$$

$$N_k = n_{k-1}，\ \exists n_k > n_{k-1} \text{ 使得 } x_{n_k} - x_{n_{k-1}} > \varepsilon_0。$$

把以上式子相加得$x_{n_k} - x_1 > k\varepsilon_0$，对任意的实数$G$，当$k > \dfrac{G - x_1}{\varepsilon_0}$时有$x_{n_k} > G$，这与$\{x_n\}$有上界矛盾。故数列$\{x_n\}$有极限。

证法三（利用区间套定理证明单调有界定理）

只证递增有上界数列必有极限的情形。

不妨设$\{x_n\}$为递增有上界数列，取闭区间$[a_1, b_1]$，使a_1不是数列$\{x_n\}$的上界（如$a_1 = x_1 - 1$），b_1是数列$\{x_n\}$的上界，则$[a_1, b_1]$包含数列$\{x_n\}$的无穷多项，而在$[a_1, b_1]$

外至多含有数列$\{x_n\}$的有限项。

将$[a_1,b_1]$二等分为两个小区间，其中必有一小区间含有数列$\{x_n\}$的无穷多项，而在此小区间外至多含有数列$\{x_n\}$的有限项，记这样的小区间为$[a_2,b_2]$。

无限继续下去，可得一闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$满足区间套定理，故存在唯一的$\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$\xi-\varepsilon<a_n<b_n<\xi+\varepsilon$。取$n_0>N$，$[a_{n_0},b_{n_0}]$含有数列$\{x_n\}$的无穷多项，即$\exists M$使$x_M\in[a_{n_0},b_{n_0}]$，则当$m>M$时，有$x_m\in[a_{n_0},b_{n_0}]$。

否则，$\exists m_1>M$有$b_{n_0}<x_{m_1}$，则在$[a_{n_0},b_{n_0}]$中最多只有数列$\{x_n\}$的前m_1项，与前提矛盾。从而当$m>M$时，有$\xi-\varepsilon<a_{n_0}\leqslant x_m\leqslant b_{n_0}<\xi+\varepsilon$，亦即$|x_m-\xi|<\varepsilon$。

故$\forall\varepsilon>0$，$\exists M$，当$m>M$时有$|x_m-\xi|<\varepsilon$，所以数列$\{x_n\}$的极限为ξ。

证法四（利用聚点定理证明单调有界定理）

只证递增有上界数列必有极限的情形。不妨设$\{x_n\}$为递增有上界数列。

如果$\{x_n\}$是常数数列，极限显然存在，定理成立。

如果$\{x_n\}$不是常数数列，那么由点x_n（$n=1,2,\cdots$）所组成的集合（仍用$\{x_n\}$表示）是一有界的无穷点集。由聚点定理知，$\{x_n\}$至少有一个聚点。

先证$\{x_n\}$的聚点是唯一的。

假定$\{x_n\}$有两个聚点ξ_1,ξ_2，设$\xi_1<\xi_2$，根据聚点定义，对于$0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}(\xi_2-\xi_1)$，在邻域$U(\xi_1,\varepsilon)$与$U(\xi_2,\varepsilon)$内都有$\{x_n\}$中的无穷多个点。

设某一$x_N\in\{x_n\}\cap U(\xi_2,\varepsilon)$，由$\{x_n\}$递增知，当$n>N$时有$x_n>x_N$，即在点$x_N$的左边至多只有$\{x_n\}$中的有限多个点，从而$U(\xi_1,\varepsilon)\cap\{x_n\}$至多只有有限多个点。这与$\xi_1$是$\{x_n\}$的聚点矛盾，所以$\{x_n\}$的聚点是唯一的，记这个聚点为$\xi$。

再证在聚点ξ的任意邻域$U(\xi,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$之外，最多只有$\{x_n\}$的有限多个点。

假若不然，根据聚点定理，$\{x_n\}$又有异于ξ的聚点，这与$\{x_n\}$的聚点是唯一的结论矛盾。

最后证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

因对任意的$\varepsilon>0$，在$U(\xi,\varepsilon)$内有$\{x_n\}$的无穷多个点，而在$U(\xi,\varepsilon)$之外最多只有$\{x_n\}$的有限多个点。故必存在N，当$n>N$时有$x_n\in U(\xi,\varepsilon)$，即$|x_n-\xi|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

证法五（利用致密性定理证明单调有界定理）

不妨设数列$\{x_n\}$递增有界，则由致密性定理知，必有收敛的子列$\{x_{n_k}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$，则

$$\forall\varepsilon>0,\exists K>0,\forall k>K,\ |x_{n_k}-\xi|<\varepsilon\text{，}$$

即$\xi-\varepsilon<x_{n_k}<\xi+\varepsilon$。

取$N=n_{K+1}$，当$n>N=n_{K+1}$时有$n_n\geqslant n\geqslant n_K$，由$\{x_n\}$递增得

$$\xi-\varepsilon<x_{n_{K+1}}\leqslant x_n\leqslant x_{n_n}<\xi+\varepsilon$$

故得$\xi-\varepsilon<x_n<\xi+\varepsilon$。

所以数列$\{x_n\}$的极限为ξ。

证法六（利用有限覆盖定理证明单调有界定理）

不妨设数列$\{x_n\}$递增有界，且$a\leqslant x_n\leqslant b$，假设$\{x_n\}$的极限不存在，所以$\forall x_0\in[a,b]$，$x_0$都不是$\{x_n\}$的极限，则$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，当$n>N$时，有$|x_n-x_0|\geqslant\varepsilon_0$，则存在$x_0$的某邻域$U\left(x_0,\dfrac{\varepsilon_0}{2}\right)$中只含有$\{x_n\}$的有限项。

令$H=\left\{U\left(x,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\mid x\in[a,b]\right\}$，则$H$是闭区间$[a,b]$的一个无限开覆盖，由有限覆盖定理知，必存在有限子覆盖。不妨设存在$U\left(x_1,\dfrac{\varepsilon_1}{2}\right),U\left(x_2,\dfrac{\varepsilon_2}{2}\right),\cdots,U\left(x_k,\dfrac{\varepsilon_k}{2}\right)$是$[a,b]$的一个有限开覆盖，即$\bigcup\limits_{i=1}^{k}U\left(x_i,\dfrac{\varepsilon_i}{2}\right)\supset[a,b]$，而每个$U(x_i)(i=1,\ 2,\cdots,k)$只含有限个点，从而它们的并也只含有限个点，从而得出$[a,b]$也只含有限个点，这与$[a,b]$是无限点集矛盾。

故得证。

7.2.3 柯西收敛准则及其证明

定理 7.3（柯西收敛准则） 数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$m,n>N$时有$|x_m-x_n|<\varepsilon$。

或者表述为：数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是收敛$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall\ n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}$有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$。

证法一（利用确界存在定理证明柯西收敛准则）

必要性：

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由极限定义知，$\forall\varepsilon>0,\exists N$，当$n>N$，$m>N$时有$|x_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|x_m-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，因而$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-A|+|x_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。

充分性：

构造非空有界数集S，因为要证明数列$\{x_n\}$收敛，故数集S必须含有数列$\{x_n\}$的无限多项，为此，令$S=\{x\mid(-\infty,x)\cap\{x_n\}$是空集或有限点集$\}$。

由已知，对$\varepsilon=1$，$\exists N$，对$n>N$，$N+1>N$有$|x_n-x_{N+1}|<1$，即$|x_n|\leqslant|x_{N+1}|+1$，取$M=\max\{|x\ \ |,|x_2|,\cdots,|x_N|,|x_{N+1}|+1\}$，则对一切$n$有$|x_n|\leqslant M$，故数列$\{x_n\}$有界。

因数列$\{x_n\}$的下界$a\in S$，上界b也是S的上界。所以S是非空有上界的数集，由确界定理知数集S存在上确界，设$\xi=\sup S$。

对任意的$\varepsilon>0$，$(-\infty,\xi)\bigcap\{x_n\}$是无限点集，否则就与$\xi=\sup S$矛盾。

因$(-\infty,\xi-\varepsilon)\bigcap\{x_n\}$至多含有$\{x_n\}$的有限多个点，故$(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$含有$\{x_n\}$的无限多个点，设$x_{n_k}\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$（$k=1,2,\cdots$）且$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，取$N_1=\max\{N,n_1\}$，则当$n>N_1$时，总存在$n_k>N_1$使$x_n-\xi\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-\xi|<2\varepsilon$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

证法二（利用单调有界定理证明柯西收敛准则）

只证充分性（必要性的证明见证法一）。

易证数列$\{x_n\}$有界（见证法一），不妨设$a\leqslant x_n\leqslant b$。

用如下的方法取得$\{x_n\}$的一个单调子列$\{x_{n_k}\}$：

① 取$x_{n_k}\in\{x_n\}$，使$[a,x_{n_k}]$或$[x_{n_k},b]$中含有无穷多的$[a,b]$中的项；

② 在$[a,x_{n_k}]$或$[x_{n_k},b]$中取得$x_{n_{k+1}}\in\{x_n\}$且满足条件①；

③ 取向时方向一致，要么由$a\to b$，要么由$b\to a$。

由数列$\{x_n\}$的性质可知，以上三点可以做到。这样，取出一个数列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$且$\{x_{n_k}\}$是一个单调有界数列，则它必有极限，设为$\xi$。下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

由柯西条件及$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$知，$\forall\varepsilon>0,\ \exists N$，当$m,n,k>N$时有$|x_m-x_n|<\varepsilon$和$|x_{n_k}-\xi|<\varepsilon$同时成立。

当$n>N$，取$m=n_k(\geqslant k>N)$时得$|x_n-\xi|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-\xi|<2\varepsilon$。所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

证法三（利用区间套定理证明柯西收敛准则）

只证充分性（必要性的证明见证法一）。

由柯西条件知，$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall\ m,n\geqslant N$有$|x_m-x_n|<\varepsilon$。

取$m=N$，则当$n\geqslant N$时有$|x_N-x_n|<\varepsilon$，即$x_N-\varepsilon<x_n<x_N+\varepsilon$，即在区间$[x_N-\varepsilon,x_N+\varepsilon]$内含有$\{x_n\}$中除有限项外的几乎所有的项。

令$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，则$\exists N_1$，在区间$\left[x_{N_1}-\dfrac{1}{2},x_{N_1}+\dfrac{1}{2}\right]$内含有$\{x_n\}$中除有限项外的几乎所有的项，记该区间为$[a_1,b_1]$。

再令$\varepsilon=\dfrac{1}{2^2}$，则$\exists N_2(>N_1)$，在区间$\left[x_{N_2}-\dfrac{1}{2^2},x_{N_2}+\dfrac{1}{2^2}\right]$内含有$\{x_n\}$中除有限项外的几乎所有的项，记$[a_2,b_2]=\left[x_{N_2}-\dfrac{1}{2^2},x_{N_2}+\dfrac{1}{2^2}\right]\bigcap[a_1,b_1]$，它也含有$\{x_n\}$中除有限项外的几乎所有的项，且$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$b_2-a_2\leqslant\dfrac{b_1-a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$；依次继续令$\varepsilon=\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$，得一闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$满足：

（i）$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$（$n=1,2,\cdots$）；

（ii）$b_n-a_n\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}\to0\ (n\to\infty)$；

（iii）每个区间中都含有$\{x_n\}$中除有限项外的几乎所有的项。

由区间套定理，故存在唯一的$\xi\in[a_n,b_n]$（$n=1,2,\cdots$）且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

再证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 知，$\forall\varepsilon>0,\exists N,$当$n>N$时有$\xi-\varepsilon<a_n<b_n<\xi+\varepsilon$，即$[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)$，由$[a_n,b_n]$中含有$\{x_n\}$中除有限项外的几乎所有的项得，$U(\xi,\varepsilon)$中含有$\{x_n\}$中除有限项外的几乎所有的项。即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

证法四（利用聚点定理证明柯西收敛准则）

只证充分性（必要性的证明见证法一）。

如果$\{x_n\}$是常数列，$\{x_n\}$显然收敛；如果$\{x_n\}$不是常数列，那么由点x_n $(n=1,2,\cdots)$所组成的点集（仍记作$\{x_n\}$）是一无穷点集。

由柯西条件知，取 $\varepsilon=1$，$\exists N_0$，当$m,n>N_0$时有$|x_m-x_n|<1$，取 $m=N_0+1$，则有$|x_{N_0+1}-x_n|<1$，即$|x_n|\leqslant|x_{N_0+1}|+1$，令$M=\max\{|x\ |,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|,|x_{N_0+1}|+1\}$，则对一切$n$有$|x_n|\leqslant M$，故$\{x_n\}$是有界的无穷点集。

根据聚点定理知$\{x_n\}$至少有一个聚点。

再证$\{x_n\}$的聚点是唯一的。

假定$\{x_n\}$有两个聚点ξ_1,ξ_2，设$\xi_1<\xi_2$，根据柯西条件，对于$0<\varepsilon<\dfrac{1}{3}(\xi_2-\xi_1)$，$\exists N$，当$m,n>N$时有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon \tag{①}$$

又根据聚点定义，对上述的ε，在邻域$U(\xi_1,\varepsilon)$与$U(\xi_2,\varepsilon)$内都有$\{x_n\}$中的无穷多个点。在$U(\xi_1,\varepsilon)$内选取$x_{m_0}\in\{x_n\}$并使$m_0>N$，在$U(\xi_2,\varepsilon)$内选取$x_{n_0}\in\{x_n\}$并使$n_0>N$。对于这样的m_0,n_0，却有$|x_{m_0}-x_{n_0}|>\dfrac{1}{3}(\xi_2-\xi_1)>\varepsilon$，这显然与式①矛盾。所以$\{x_n\}$的聚点是唯一的，记这个聚点为$\xi$。

最后证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

因对任意的$\varepsilon>0$，在$U(\xi,\varepsilon)$内有$\{x_n\}$的无穷多个点，而在$U(\xi,\varepsilon)$之外最多只有$\{x_n\}$的有限多个点（否则，在$U(\xi,\varepsilon)$之外必还有$\{x_n\}$的聚点，这与聚点唯一矛盾）。

故必存在N，当$n>N$时有$x_n\in U(\xi,\varepsilon)$，即$|x_n-\xi|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

证法五（利用致密性定理证明柯西收敛准则）

只证充分性（必要性的证明见证法一）。

由柯西条件知，取 $\varepsilon=1$，$\exists N_0$，$m,n>N_0$有$|x_m-x_n|<1$，取 $m=N_0+1$，则

有$\left|x_{N_0+1}-x_n\right|<1$，即$|x_n|\leqslant|x_{N_0+1}|+1$，令$M=\max\{|x\ |,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|,|x_{N_0+1}|+1\}$，则对一切$n$有$|x_n|\leqslant M$，故$\{x_n\}$为有界数列。

根据致密性定理知$\{x_n\}$必存在收敛的子列$\{x_{n_k}\}$设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$。

下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

由柯西条件及$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$知，$\forall\varepsilon>0,\ \exists N$，当 $m,n,k>N$时有$\left|x_m-x_n\right|<\varepsilon$和$|x_{n_k}-\xi|<\varepsilon$同时成立。

当$n>N$时，取$m=n_k\ (\geqslant k>N)$时得$\left|x_n-\xi\right|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-\xi|<2\varepsilon$。

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

证法六（利用有限覆盖定理证明柯西收敛准则）

只证充分性（必要性的证明见证法一）。

由柯西条件知，取$\varepsilon=1,\ \exists N_0$，当$m,n>N_0$时有$\left|x_m-x_n\right|<1$，取$m=N_0+1$，则有$\left|x_{N_0+1}-x_n\right|<1$，即$|x_n|\leqslant|x_{N_0+1}|+1$，令$M=\max\{|x\ |,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|,|x_{N_0+1}|+1\}$，则对一切$n$有$|x_n|\leqslant M$，故$\{x_n\}$为有界数列。

下面证明$\{x_n\}$有极限。

不妨设$\{x_n\}\subset[a,b]$，假设$\{x_n\}$的极限不存在，所以$\forall x_0\in[a,b]$，x_0都不是$\{x_n\}$的极限，则$\exists\varepsilon_0>0,\forall N$，当$n>N$时有$|x_n-x_0|\geqslant\varepsilon_0$，则存在$x_0$的某邻域$U\left(x_0,\dfrac{\varepsilon_0}{2}\right)$中只含有$\{x_n\}$的有限项。

令$H=\left[U\left(x,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)|\,x\in[a,b]\right]$，则$H$是闭区间$[a,b]$的一个无限开覆盖，由有限覆盖定理知，必存在有限子覆盖。不妨设存在$U\left(x_1,\dfrac{\varepsilon_1}{2}\right),U\left(x_2,\dfrac{\varepsilon_2}{2}\right),\cdots,U\left(x_k,\dfrac{\varepsilon_k}{2}\right)$是$[a,b]$的一个有限开覆盖，即$\bigcup\limits_{i=1}^{k}U\left(x_i,\dfrac{\varepsilon_i}{2}\right)\supset[a,b]$，而每个$U\left(x_i,\dfrac{\varepsilon_i}{2}\right)(i=1,2,\cdots,k)$只含有限个点，从而它们的并也只含有限个点，从而得出$[a,b]$也只含有限个点，这与$[a,b]$是无限点集矛盾，故得证。

7.2.4　区间套定理及其证明

定理 7.4（区间套定理）　若$\{[a_n,b_n]\}$是一个区间套，即设闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$具有如下性质：

（i）$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则在实数系中存在唯一的一点ξ，使得$\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

证法一（利用确界存在定理证明区间套定理）

令数集 $S=\{a_n\}$，显然 S 非空有上界（例如 b_1），故由确界定理知，S 存在上确界，设 $\xi=\sup S$。下面证明 ξ 即为所求。

因 ξ 为 S 的一个上界，故 $a_n\leqslant\xi\,(n=1,2,\cdots)$；再由 ξ 为 S 的最小上界知，假设由某个 $b_m<\xi$，b_m 不是 S 的上界，即 $\exists a_k>b_m$，这与 $\{[a_n,b_n]\}$ 为区间套矛盾（$a_i>b_j$）。所以对任意的 b_n 都有 $b_n\geqslant\xi$，故得 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$。

假设还有另外的 $\xi'\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$，则 $|\xi-\xi'|\leqslant|a_n-b_n|\to 0$，故 $\xi=\xi'$，从而唯一性得证。

证法二（利用单调有界定理证明区间套定理）

由（i）知 $\{a_n\}$ 为递增有界数列，由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 有极限 ξ，且有 $a_n\leqslant\xi\,(n=1,2,\cdots)$，同理，递减有界数列 $\{b_n\}$ 也有极限，由区间套的条件（ii）知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$ 且 $b_n\geqslant\xi\,(n=1,2,\cdots)$，故得 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$。

假设还有另外的 $\xi'\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$，则 $|\xi-\xi'|\leqslant|a_n-b_n|\to 0$，故 $\xi=\xi'$，从而唯一性得证。

证法三（利用柯西收敛准则证明区间套定理）

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 知，$\forall\varepsilon>0,\exists N$，当 $n>N$ 时有 $|b_n-a_n|<\varepsilon$。由于 $\{a_n\}$ 单调递增，$\{b_n\}$ 中的每一个元素都是 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\forall m>n>N$，有 $a_n\leqslant a_m\leqslant b_m\leqslant b_n$，所以

$$|a_m-a_n|=a_m-a_n\leqslant b_n-a_n=|b_n-a_n|<\varepsilon,$$
$$|b_m-b_n|=b_n-b_m\leqslant b_n-a_n=|b_n-a_n|<\varepsilon$$

故由柯西收敛准则知，$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，再由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 知极限相同，设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

下面证明 $\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$。

用反证法。若 $\exists N_1$ 使 $\xi<a_{N_1}$，由 $\{a_n\}$ 单调递增知，当 $n>N_1$ 时有 $a_n>a_{N_1}>\xi$，所以 $|a_n-\xi|=a_n-\xi\geqslant 0$，两边取极限有 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\xi)<0$，与前提矛盾。若 $\exists N_2$ 使 $\xi>b_{N_2}$，由 $\{b_n\}$ 单调递减知，当 $n>N_2$ 时有 $\xi>b_n>b_{N_2}$，所以 $|b_n-\xi|=\xi-b_n\geqslant 0$，两边取极限有 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}(\xi-b_n)<0$，与假设矛盾。故 $\xi\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$。

最后证明 ξ 是唯一的。

假设还有另外的 $\xi'\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$，则 $|\xi-\xi'|\leqslant|a_n-b_n|\to 0$，故 $\xi=\xi'$，从而唯一性得证。

证法四（利用聚点定理证明区间套定理）

设数集 $S=\{a_n\}\cup\{b_n\}$，则 S 为有界无限点集，由聚点定理知，S 存在聚点 ξ。

下面证明 $\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$。

即证在 ξ 的右边没有 $[a_n,b_n]$ 的左端点，在 ξ 的左边没有 $[a_n,b_n]$ 的右端点。

用反证法。若存在某个 a_N 使 $a_N > \xi$，由 $\{a_n\}$ 单调递增知，当 $n > N$ 时有 $a_n > a_N$，即在 a_N 的左边至多有限多个左端点，从而至多有 S 中的有限多个点，这与 ξ 为 S 的聚点矛盾！故所有的 a_n 均有 $a_n \leqslant \xi$。

同理可证，ξ 的左边没有 $[a_n, b_n]$ 的右端点，即所有的 b_n 均有 $\xi \leqslant b_n$。

从而 $\xi \in [a_n, b_n]\ (n=1,2,\cdots)$。

最后证明 ξ 是唯一的。

假设还有另外的 $\xi' \in [a_n, b_n]\ (n=1,2,\cdots)$，则 $|\xi - \xi'| \leqslant |a_n - b_n| \to 0$，故 $\xi = \xi'$，从而唯一性得证。

证法五（利用致密性定理证明区间套定理）

由已知条件知，$\{a_n\}$ 单调递增有界，$\{b_n\}$ 单调递减有界，根据致密性定理，存在 $\{b_n\}$ 的子列 $\{b_{n_k}\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = \xi$。

由 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}(b_{n_k} - a_{n_k}) = 0$，推出 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$，由 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的单调性可推出，$\forall k$，有 $\xi \in [a_{n_k}, b_{n_k}]$。又 $\forall n, \exists k$ 使得 $[a_{n_k}, b_{n_k}] \subset [a_n, b_n]$，故 $\xi \in [a_n, b_n]$。

最后证明 ξ 是唯一的。

假设还有另外的 $\xi' \in [a_n, b_n]\ (n=1,2,\cdots)$，则 $|\xi - \xi'| \leqslant |a_n - b_n| \to 0$，故 $\xi = \xi'$，从而唯一性得证。

证法六（利用有限覆盖定理证明区间套定理）

用反证法。假设 $[a_n, b_n]\ (n=1,2,\cdots)$ 没有公共点，则 $[a_1, b_1]$ 上的任何一点都不是 $\{[a_n, b_n]\}$ 的公共点，从而 $\forall x \in [a_1, b_1]$，总存在一个开区间 $(x-\delta_x, x+\delta_x)$，使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x)$ 与所有的 $[a_n, b_n]$ 无交集，即存在某个 $[a_{n_x}, b_{nx}]$ 使得 $[a_{n_x}, b_{nx}] \cap (x-\delta_x, x+\delta_x) = \varnothing$。

当 x 取遍 $[a_1, b_1]$ 上的所有点时，就得到一无限开区间集 $H = \{(x-\delta_x, x+\delta_x) \mid x \in [a_1, b_1]\}$ 覆盖了闭区间 $[a_1, b_1]$，由有限覆盖定理，存在有限个开区间 $H = \{(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) \mid i = 1,2,\cdots,k\}$ 覆盖 $[a_1, b_1]$，其中 $[a_{n_{x_i}}, b_{n_{x_i}}] \cap (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) = \varnothing$。

因为 $[a_{n_{x_i}}, b_{n_{x_i}}]$ 只有有限个，由闭区间套定理的条件知，它们是一个套一个，因此其中一定有一个最小区间，设为 $[a_{n_0}, b_{n_0}]$，这时 $[a_{n_0}, b_{n_0}] \cap (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) = \varnothing$ $(i = 1,2,\cdots,k)$。

从而 $[a_{n_0}, b_{n_0}] \cap \bigcup\limits_{i=1}^{k}(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) = \varnothing$，这与 $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset [a_1, b_1]$ 矛盾。

所以 $[a_n, b_n]\ (n=1,2,\cdots)$ 应有公共点。

7.2.5　聚点定理及其证明

定理 7.5（聚点定理）　实轴上的任一有界无限点集至少有一个聚点。

证法一（利用确界存在定理证明聚点定理）

设S是直线上的有界无限点集，则由确界存在定理有$\eta=\sup S,\xi=\inf S$。

若η,ξ中有一点不是S的孤立点，则显然是S的聚点。否则，令$E=\{x\in R\,|\,S$中仅有有限个数小于$x\}$，显然E非空且有上界，故有上确界，设$\eta'=\sup E$，则由E的构造方法可知，$\forall\varepsilon>0$必有$\eta'+\varepsilon\notin E$，即$S$中有无限个数小于$\eta'+\varepsilon$，大于$\eta'$，所以$(\mu'-\varepsilon,\eta'+\varepsilon)$中含有$S$的无限个数，故$\eta'$是$S$的聚点。

证法二（利用单调有界定理证明聚点定理）

设S是直线上的有界无限点集，所以$\exists M>0$，对任意的$x\in S$都有$-M\leqslant x\leqslant M$。令$[a_1,b_1]=[-M,M]$，则$[a_1,b_1]$含有S的无穷多个点。

将$[a_1,b_1]$二等分为两个小区间，则其中至少有一个闭区间含有S的无穷多个点，记这样的小闭区间为$[a_2,b_2]$，这样无限进行下去，得一闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，此闭区间套的左端点所组成的数列$\{a_n\}$单调递增且有上界b_1，故由单调有界定理知$\{a_n\}$必有极限，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，由闭区间套的做法知$\xi\in[a_n,b_n]$。

下面证明ξ是S的聚点。

$\forall\varepsilon>0$，因$b_n-a_n=\dfrac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\to0(n\to\infty)$，所以$\exists N>0$使$[a_N,b_N]\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$，由$[a_N,b_N]$中含有$S$的无穷多个点知$(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$中含有$S$的无穷多个点。

所以ξ是S的聚点。

证法三（利用单调有界定理证明聚点定理）

设S是一有界无限点集，则在S中选取一个由有限多个互不相同的点组成的数列$\{a_n\}$，显然数列$\{a_n\}$是有界的。

下面我们从$\{a_n\}$中抽取一个单调子列，从而由单调有界定理知该子列收敛，然后证明该子列的极限值就是有界无限点集S的聚点，分两种情况来讨论：

（1）如果在$\{a_n\}$的任意一项之后，总存在最大的项（因S有界且$\{a_n\}\in S$，这是可能的），设a_1后的最大项是a_{n_1}，a_{n_1}后的最大项是a_{n_2}，显然$a_{n_2}\leqslant a_{n_1}$；一般地，a_{n_k}后的最大项是$a_{n_{k+1}}$，显然$a_{n_{k+1}}\leqslant a_{n_k}$ $(k=1,2,\cdots)$；这样就得到了$\{a_n\}$的一个单调递减的子列$\{a_{n_k}\}$，因$\{a_n\}$有界知$\{a_{n_k}\}$有界，由单调有界定理知$\{a_{n_k}\}$收敛。

（2）如果（1）不成立，即从某一项以后，任何一项都不是最大的（为证明书写简单起见，不妨设从第一项起，每一项都不是最大项）。于是，取$a_{n_1}=a_1$，因a_{n_1}不是最大项，所以必存在另一项$a_{n_2}>a_{n_1}$ $(n_2>n_1)$，又a_{n_2}也不是最大项，所以又有$a_{n_3}>a_{n_2}$ $(n_3>n_2)$，…，这样一直下去，就得到$\{a_n\}$的一个单调递增的子列$\{a_{n_k}\}$，且有上界，由单调有界定理知，$\{a_{n_k}\}$收敛。

总之，总能做出$\{a_n\}$的一个单调收敛子列$\{a_{n_k}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\xi$。

再证ξ是S的聚点。

由$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\xi$知，$\forall\varepsilon>0,\exists K$，当$k>K$时有$\xi-\varepsilon<a_{n_k}<\xi+\varepsilon$。若$\{a_{n_k}\}$是单调递减的，则$a_{n_{k+1}}<\xi+\varepsilon$且$a_{n_{k+1}}\neq\xi,a_{n_{k+1}}\in S$，即$\xi$的$\varepsilon$邻域内含有$S$中异于$\xi$的点，

故 ξ 为 S 的聚点。若是 $\{a_{n_k}\}$ 单调递增的，类似可证。

证法四（利用柯西收敛准则证明聚点定理）

设 S 是直线上的有界无限点集，所以 $\exists M>0$，对任意的 $x\in S$ 都有 $-M\leqslant x\leqslant M$。

令 $[a_1,b_1]=[-M,M]$，则 $[a_1,b_1]$ 中含有 S 的无穷多个点。

将 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个小区间，则其中至少有一个闭区间含有 S 的无穷多个点，记这样的小闭区间为 $[a_2,b_2]$。这样无限进行下去，得一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，每一个闭区间 $[a_n,b_n]$ 中都含有 S 的无穷多个点。因此，存在 $x_1\in S$ 使 $x_1\in[a_1,b_1]$，存在 $x_2\in S$ 使 $x_2\in[a_2,b_2]$ 且 $x_2\neq x_1$，…，一般地，存在 $x_n\in S$ 使 $x_n\in[a_n,b_n]$ 且 $x_n\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$。

下面证明数列 $\{x_n\}$ 满足柯西收敛准则。

$\forall 0<\varepsilon<1$，取 $N=\dfrac{\ln\frac{M}{\varepsilon}}{\ln 2}$，当 $m,n>N$ 时，有 $x_m,x_n\in[a_{N+1},b_{N+1}]$，则

$$|x_m-x_n|\leqslant b_{N+1}-a_{N+1}=\frac{M}{2^N}=\varepsilon$$

故由柯西收敛准则知，数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

再证 ξ 为 S 的聚点。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ 得，$\forall\varepsilon>0,\exists N_1$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-\xi|<\varepsilon$，即 $\xi-\varepsilon<x_n<\xi+\varepsilon$，这说明在 ξ 的 ε 邻域 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无限多个点，所以 ξ 为 $\{x_n\}$ 的聚点，又 $\{x_n\}\subset S$，所以 ξ 也为 S 的聚点。

证法五（利用区间套定理证明聚点定理）

因 S 为有界点集，故存在 $M>0,$ 使得 $S\subset[-M,M]$，记 $[a_1,b_1]=[-M,M]$。

现将 $[a_1,b_1]$ 等分为两个子区间。因 S 为无限点集，故两个区间中至少有一个含有 S 中无穷多个点，记此子区间为 $[a_2,b_2]$，则 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]$，且 $b_2-a_2=\dfrac{1}{2}(b_1-a_1)=M$。

再将 $[a_2,b_2]$ 等分为两个子区间，则其中至少有一个子区间含有 S 中无穷多个点，取出这样的一个子区间，记为 $[a_3,b_3]$，则 $[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]$，且 $b_3-a_3=\dfrac{1}{2}(b_2-a_2)=\dfrac{M}{2}$。

将此等分子区间的手续无限地进行下去。得到一个区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，它满足：

（i）$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\,(n=1,2,\cdots)$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2M}{2^{n-1}}=0$；

（iii）每一个 $[a_n,b_n]$ 都含有 S 中无穷多个点，

由区间套定理，存在唯一一点 $\xi\in[a_n,b_n]\subset[a,b]\,(n=1,2,\cdots)$，由区间套定理的推论，

对任给的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时有$[a_n,b_n]\subset U(\xi,\ \varepsilon)$。从而$U(\xi;\ \varepsilon)$内含有$S$中无穷多个点，故$\xi$为$S$的一个聚点。

证法六（利用致密性定理证明聚点定理）

设S为有界无限点集，由S为无限点集知，S中有各项互异的点列$\{x_n\}$，由S有界知，$\{x_n\}$有界。

故由致密性定理知，存在$\{x_n\}$的子数列$\{x_{n_k}\}$收敛，设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$。

由$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$得，$\forall\varepsilon>0,\exists K,\forall k>K$有$\xi-\varepsilon<x_{n_k}<\xi+\varepsilon$，由点列$\{x_n\}$的各项互异知，故$\xi$为$S$的聚点。

证法七（利用有限覆盖定理证明聚点定理）：

设S为实数集上有界无限点集，不妨设$S\subset[-M,M]$，若S有聚点，则聚点必属于$[-M,M]$。

假设$[-M,M]$中的任何点都不是S的聚点，从而$\forall x\in[-M,M]$，存在$\delta_x>0$，使得$(x-\delta_x,x+\delta_x)$内至多含有S的有限多个点。

当x取遍$[-M,M]$上的所有点时，就得到一无限开区间集$H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\,|\,x\in[-M,M]\}$覆盖了闭区间$[-M,M]$，

由有限覆盖定理知，存在有限个开区间$H^*=\{(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\,|\,i=1,2,\cdots,k\}$覆盖$[-M,M]$。

由每个$(x-\delta_x,x+\delta_x)$内至多含有S的有限多个点，知H^*内至多含有S的有限多个点，这与H^*覆盖了全部S中的无限多个点矛盾。

所以S至少存在一个聚点。

7.2.6 致密性定理及其证明

定理 7.6（致密性定理） 有界数列必有收敛子列。

证法一（利用确界存在定理证明致密性定理）

设数列$\{x_n\}$是有界数列，定义数集$S=\{x\,|\,\{x_n\}\text{中大于}x\text{的点有无穷多个}\}$，因$\{x_n\}$有界，所以由确界存在定理知$S$必有上确界，设$\xi=\sup S$。

由$\xi=\sup S$知，$\forall\varepsilon>0$，$\xi-\varepsilon$不是S的上界，所以$\{x_n\}$中大于$\xi-\varepsilon$的项有无穷多个；而$\xi+\varepsilon$是S的上界，所以$\{x_n\}$中大于$\xi+\varepsilon$的项只有有限项，故在$(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$中有$\{x_n\}$的无穷多项。

取$\varepsilon=1$，则$\{x_n\}$中存在一项x_{n_1}使$|x_{n_1}-\xi|<1$；

取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，则$\{x_n\}$中存在一项x_{n_2} $(n_2>n_1)$使$|x_{n_2}-\xi|<\dfrac{1}{2}$；

$$\vdots$$

取$\varepsilon=\dfrac{1}{k}$，则$\{x_n\}$中存在一项$x_{n_k}(n_k>n_{k-1})$使$|x_{n_k}-\xi|<\dfrac{1}{k}$；

由此得到$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{n_k}\}$收敛于ξ，所以数列$\{x_n\}$存在收敛子数列。

证法二（利用单调有界定理证明致密性定理）

设数列$\{x_n\}$是有界数列，首先证明$\{x_n\}$中存在单调子数列。

（1）若$\{x_n\}$中存在单调递增子数列$\{x_{n_k}\}$，则得证。

（2）若$\{x_n\}$中无单调递增子数列，那么$\exists n_1$，当$n>n_1$时恒有$x_{n_1}>x_n$；同样在$\{x_n\}$（$n>n_1$）中也无单调递增子数列，于是又$\exists n_2$，当$n_2>n$时恒有$x_{n_2}<x_n<x_{n_1}$；如此无限进行下去，便可得到一严格递减子数列$\{x_{n_k}\}$。

由上可知，$\{x_n\}$中存在单调子数列$\{x_{n_k}\}$，而$\{x_n\}$有界，所以$\{x_{n_k}\}$有界。故由单调有界定理知，$\{x_{n_k}\}$必收敛，即有界数列$\{x_n\}$必有收敛子列$\{x_{n_k}\}$。

证法三（利用柯西收敛准则证明致密性定理）

设数列$\{x_n\}$是有界数列，不妨设$\{x_n\}\subset[a,b]$，即$[a,b]$中包含$\{x_n\}$的无穷多项。对$[a,b]$二等分，则至少有一个小区间包含$\{x_n\}$的无穷多项，记这样的小区间为$[a_1,b_1]$，再将$[a_1,b_1]$二等分，又得到包含$\{x_n\}$的无穷多项的小区间$[a_2,b_2]$，无限进行下去，得一闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，每个$[a_n,b_n]$都包含$\{x_n\}$的无穷多项。

易证$\{a_n\},\{b_n\}$为柯西数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，然后采用构造的方法即可得到$\{x_n\}$的一个收敛于$\xi$的子列。

证法四（利用区间套定理证明致密性定理）

设数列$\{x_n\}$是有界数列，不妨设$\{x_n\}\subset[a,b]$，即$[a,b]$中包含$\{x_n\}$的无穷多项，对$[a,b]$二等分，则至少有一个小区间包含$\{x_n\}$的无穷多项，记这样的小区间为$[a_1,b_1]$，再将$[a_1,b_1]$二等分，又得到包含$\{x_n\}$的无穷多项的小区间$[a_2,b_2]$，无限进行下去，得一闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$满足：

（i）$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$（$n=1,2,\cdots$）；

（ii）$b_n-a_n\leqslant\dfrac{b-a}{2^n}\to 0\ (n\to\infty)$；

（iii）每个$[a_n,b_n]$都包含$\{x_n\}$的无穷多项，

由区间套定理，故存在唯一的$\xi\in[a_n,b_n]$（$n=1,2,\cdots$）且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

在$[a_1,b_1]$中任取$\{x_n\}$的一项，记为x_{n_1}，由于$[a_2,b_2]$中包含$\{x_n\}$的无穷多项，因此必含有x_{n_1}以后的无穷多项，在这些项中取一项，记为x_{n_2}，继续下去，即可得$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$，其中$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，且$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k$，令$k\to\infty$得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$。

证法五（利用聚点定理证明致密性定理）

设数列$\{x_n\}$是有界数列，若数列$\{x_n\}$中有无限多相等的项，则由这些项组成$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$是一个常数列，且收敛。

若数列$\{x_n\}$中相等的项只有有限项，即$\{x_n\}$为无穷有界点集，由聚点定理知，

$\{x_n\}$ 至少有一个聚点 ξ 。

根据聚点的定义，对 $\varepsilon_1=1$ ，存在 $x_{n_1}\in U(\xi,\varepsilon_1)\cap\{x_n\},x_{n_1}\neq\xi$ ；

对 $\varepsilon_2=\min\left\{\dfrac{1}{2},|x_{n_1}-\xi|\right\}$ ，存在 $x_{n_2}\in U(\xi,\varepsilon_2)\cap\{x_n\},x_{n_2}\neq\xi,x_{n_2}\neq x_{n_1}$ ；

$$\vdots$$

对 $\varepsilon_k=\min\left\{\dfrac{1}{k},|x_{n_{k-1}}-\xi|\right\}$ ，存在 $x_{n_k}\in U(\xi,\varepsilon_k)\cap\{x_n\},x_{n_k}\neq\xi,x_{n_k}\neq x_{n_i},i=1,2,\cdots,k-1$

$$\vdots$$

从而得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ ，它的各项互不相同，且 $|x_{n_k}-\xi|<\varepsilon_k\leqslant\dfrac{1}{k}$，故 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 ξ 。

证法六（利用有限覆盖定理证明致密性定理）

设数列 $\{x_n\}$ 是有界数列，不妨设 $\{x_n\}\subset[a,b]$ ，若数列 $\{x_n\}$ 中有无限多相等的项，则由这些项组成 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 是一个常数列，且收敛。

若数列 $\{x_n\}$ 中相等的项只有有限项，即 $\{x_n\}$ 中有无穷多个不同的项。则在 $[a,b]$ 内至少存在一点 x_0 ，对任意的正数 δ ，在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项。

事实上，假若不然，对于 $[a,b]$ 内的每一点 x ，存在正数 δ_x ，在 $(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 内仅有 $\{x_n\}$ 中的有限项；考虑所有这样的开区间组成的无限开区间集 $H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$ ， H 覆盖了闭区间 $[a,b]$，则由有限覆盖定理知，存在 H 中的有限个开区间 $H^*=\{(x_k-\delta_k,x_k+\delta_k)\mid k=1,2,\cdots,n\}$ 也覆盖了 $[a,b]$，并且每个 $(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)$ 中都仅含有 $\{x_n\}$ 的有限项，与前提矛盾。

于是，对于 $\delta_k=\dfrac{1}{k}\,(k=1,2,\cdots)$，在 $(x_k-\delta_k,x_k+\delta_k)$ 内取 $\{x_n\}$ 的点，组成 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $|x_{n_k}-x_0|<\delta_k\leqslant\dfrac{1}{k}$，令 $k\to\infty$ 得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$ 。

7.2.7 有限覆盖定理及其证明

定理 7.7（有限覆盖定理） 设 H 为闭区间 $[a,b]$ 的一个（无限）开覆盖，则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a,b]$ 。

证法一（利用确界存在定理证明有限覆盖定理）

设 H 为 $[a,b]$ 的一个开覆盖，令数集 $S=\{x\mid a<x\leqslant b,[a,x]\text{能被}H\text{中的有限个开区间覆盖}\}$，显然 S 有上界 b ，因为 a 点的邻域 $(a-\delta,a+\delta)$ 必含有 $[a,b]$ 中的点，设为 x ，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 必覆盖 $[a,x]$ ，故 S 非空。

由确界存在定理知 S 必有上确界，设 $\xi=\sup S$ 。

下面证明$\xi=b$。

反证法！若$\xi\neq b$，则$a<\xi<b$，由H覆盖闭区间$[a,b]$知，一定存在$(\alpha_1,\beta_1)\in H$，使$\xi\in(\alpha_1,\beta_1)$，取x_1,x_2使$a<x_1<\xi<x_2<\beta_1$，且$x_1\in S$，则$[a,x_1]$能被H中有限个开区间覆盖，把(α_1,β_1)加进去，就可推出$x_2\in S$，这与$\xi=\sup S$矛盾，故$\xi=b$，即定理的结论成立。

证法二（利用单调有界定理证明有限覆盖定理）

设H为$[a,b]$的一个开覆盖，假设H不存在有限子覆盖，则对$[a,b]$二等分作区间套$\{[a_n,b_n]\}$，使得每个$[a_n,b_n]$都不存在有限子覆盖。

根据区间套的做法知，$\{a_n\},\{b_n\}$都是单调有界数列，故由单调有界定理可推出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。即$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时有$\xi-\varepsilon<a_n<\xi+\varepsilon,\xi-\varepsilon<b_n<\xi+\varepsilon$，从而$[a_n,b_n]\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$。这表明$[a_n,b_n]$已被$(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$所覆盖，这与$[a_n,b_n]$的做法矛盾。

于是有限覆盖定理成立。

证法三（利用柯西收敛准则证明有限覆盖定理）

设H为$[a,b]$的一个开覆盖，假设H不存在有限子覆盖，则对$[a,b]$二等分作区间套$\{[a_n,b_n]\}$，使得每个$[a_n,b_n]$都不存在有限子覆盖。

易证$\{a_n\},\{b_n\}$都是柯西数列，故由柯西收敛准则可推出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。即$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时有$\xi-\varepsilon<a_n<\xi+\varepsilon,\xi-\varepsilon<b_n<\xi+\varepsilon$，从而$[a_n,b_n]\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$。这表明$[a_n,b_n]$已被$(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$所覆盖，这与$[a_n,b_n]$的做法矛盾。

于是有限覆盖定理成立。

证法四（利用闭区间套定理证明有限覆盖定理）

用反证法。

假设定理的结论不成立，即不能用H中有限个开区间来覆盖$\left[a,b\right]$。

将$\left[a,b\right]$等分为两个子区间，则其中至少有一个子区间不能用H中的有限个开区间来覆盖。记这个子区间为$\left[a_1,b_1\right]$，则$\left[a_1,b_1\right]\subset\left[a,b\right]$，且$b_1-a_1=\dfrac{1}{2}(b-a)$。

再将$\left[a_1,b_1\right]$等分为两个子区间，同样，其中至少有一个子区间不能用H中的有限个开区间来覆盖，记这个子区间为$\left[a_2,b_2\right]$，则$\left[a_2,b_2\right]\subset\left[a_1,b_1\right]$，且$b_2-a_2=\dfrac{1}{2^2}(b-a)$。

重复上述步骤并不断地进行下去，则得到一个闭区间列$\left\{\left[a_n,b_n\right]\right\}$，它满足：

（i）$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$（$n=1,2,\cdots$）；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$；

（iii）每一个$\left[a_n,b_n\right]$都不能用H中有限个开区间来覆盖，

由区间套定理，存在唯一的一点$\xi\in\left[a_n,b_n\right]$（$n=1,2,\cdots$）。由于$H$是$[a_n,b_n]$的一个开

覆盖，故存在开区间$(\alpha,\beta)\in H$，使$\xi\in(\alpha,\beta)$。于是当n充分大时有$[a_n,b_n]\subset(\alpha,\beta)$。这表明$[a_n,b_n]$只须用$H$中的一个开区间$(\alpha,\beta)$就能覆盖，这与挑选$[a_n,b_n]$时的假设“不能用$H$中有限个区间来覆盖”相矛盾。从而证得必存在属于$H$的有限个开区间能覆盖$[a\ ,b\ ]$。

证法五（利用聚点定理证明有限覆盖定理）

设H为$[a,b]$的一个开覆盖，假设H不存在有限子覆盖，则对$[a,b]$二等分作区间套$\{[a_n,b_n]\}$，使得每个$[a_n,b_n]$都不存在有限子覆盖。

设S为由上述区间$[a_n,b_n]$的所有端点构成的点集，则S为有界无穷点集，由聚点定理知，S至少有一个聚点ξ。

首先证明S的聚点ξ右边没有点a_n，左边没有点b_n。

事实上，假定有某个a_N在点ξ的右边，即$\xi<a_N$，则根据区间套的做法知，当$n>N$时总有$a_N<a_n$，于是在a_N的左边至多只有S的有限多个点，这与ξ为S的聚点矛盾，所以ξ右边没有点a_n。

同理可证，ξ的左边没有点b_n。故$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$（$n=1,2,\cdots$）。

又$[a_n,b_n]\subset[a,b]$，所以$\xi\in[a,b]$，根据定理假设的条件知，ξ必属于H中的某个开区间(α,β)，又对充分大的N有$[a_N,b_N]\subset(\alpha,\beta)$，这说明$[a_N,b_N]$被$H$中的一个开区间$(\alpha,\beta)$覆盖，与假设矛盾。

故定理成立。

证法六（利用致密性定理证明有限覆盖定理）

设H为$[a,b]$的一个开覆盖，假设H不存在有限子覆盖，则对$[a,b]$二等分作区间套$\{[a_n,b_n]\}$，使得每个$[a_n,b_n]$都不存在有限子覆盖。

根据闭区间套的做法知，$\{b_n\}$为有界数列，故由致密性定理知，存在$\{b_n\}$的子数列$\{b_{n_k}\}$收敛，设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}=\xi$，由$\lim\limits_{k\to\infty}(b_{n_k}-a_{n_k})=0$知$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\xi$，显然$\xi\in[a,b]$。

由$[a,b]$被H覆盖知，存在开区间$(\alpha,\beta)\in H$，使$\xi\in(\alpha,\beta)$，由$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}=\xi$知，存在充分大的$K$使得$[a_{n_K},b_{n_K}]\subset(\alpha,\beta)$，这与$[a_{n_K},b_{n_K}]$不能被$H$有限覆盖矛盾。

从而得证。

7.3 实数连续性定理的相关内容分析

7.3.1 实数连续性定理的条件与结论

1．确界存在定理的条件与结论

（1）确界存在定理是实数集特有的性质，在有理数集内一般不成立。

如$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n,b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$均为有理数列，数集$\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$非空有界，但

在有理数集内无上确界。

（2）确界存在定理中的“非空”条件是必要的，若非空有上（下）界的数集，必有正常上（下）确界。

（3）确界存在定理中的“有界”条件若去掉，则有：若非空无上（下）界的数集，必有非正常上（下）确界。

（4）若数集 S 存在上（下）确界，则上（下）确界一定是唯一的。单调递增（减）数列的极限就是该数列（作为一个数集）的上（下）确界（正常的或非正常的）。

（5）数集 S 的确界可能属于 S，也可能不属于 S。属于 S 的充要条件是数集 S 有最大（小）值，这时最大（小）值就是上（下）确界。

（6）若数集 S 存在上、下确界，则有 $\inf S \leqslant \sup S$。

（7）任何有限数集都有最大数与最小数，而对于无限数集来说情况就复杂得多。

若无限数集上方（下方）无界，自然不会有最大（小）值；若无限数集上方（下方）有界，则可能有最大（小）值，也可能没有最大（小）值。

如无限数集$\left\{\dfrac{n}{n+1}, n \in N\right\}$上方有界，但没有最大值，下方有界，但有最小值。

我们知道，有上（下）界的数集必有无穷多个上（下）界，那么对于有上（下）界而无最大（小）值的数集能否用其他的一个最小（最大）的上（下）界来“取代”最大（小）值的空缺位置，弥补无最大（小）值带来的理论研究上的损失呢？回答是肯定的，这便是上（下）确界。因此上（下）确界是对最大（小）值的拓展与引伸。

（8）利用确界原理证明理论题，是解题中的难点，其方法往往很巧妙，关键是构造适当的集合，这是证明中的难点。

2．单调有界定理的条件与结论

（1）单调有界定理是实数集特有的性质，在有理数集内一般不成立。

如 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 为有理数列，数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，但在有理数集内无极限（因极限为 e，不是有理数）。

再如，由 $\sqrt{2}$ 的不足近似值与过剩近似值组成的数列是有理数列，满足单调有界定理，但在有理数集中没有极限（因极限为 $\sqrt{2}$ ，不是有理数）。

（2）单调有界定理的条件是充分条件，但不必要。

如$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}, \left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$不是单调数列，但有极限。

（3）单调有界定理中的“有界”若去掉，则有：单调增大无上界数列必有非正常极限 $+\infty$，单调减小无下界数列必有非正常极限 $-\infty$ 。

若去掉“单调”条件，则有：有上（下）界数列必存在收敛子列，无上（下）界数列必存在以 $+\infty\,(-\infty)$为极限的子列。因此致密性定理是对单调有界定理的补充。

（4）递增有上界数列的极限就是它的上确界，它不小于数列中的任何项；递减

有下界数列的极限就是它的下确界，它不大于数列中的任何项。

（5）单调有界定理是确界存在定理的特例。因为单调有界数列$\{x_n\}$可视为一个特殊的非空有界数集。“有界”保证了正常上（下）确界的存在性，“单调”则保证了该确界值即为数列的极限。

（6）单调有界原理是一个较为直观而初学者易于接受的定理，故在一般教科书中大多以它作为一个基本公理来推出其他等价的公理。

3．柯西收敛准则的条件与结论

（1）数列的柯西收敛准则是实数集特有的性质，在有理数集内一般不成立。

如$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$为有理数列，数列$\{a_n\}$满足柯西收敛准则，但在有理数集内无极限。

（2）数列的柯西收敛准则的条件称为柯西条件，满足柯西收敛准则的数列称为柯西序列，也称为基本序列。

（3）柯西收敛准则的特点是对数列敛散的定性而非定量描述，数列的柯西收敛准则从理论上完全解决了极限的存在性问题，但不能求出极限。

（4）数列的柯西收敛准则与数列极限的$\varepsilon-N$定义的区别在于，它把$\varepsilon-N$定义中a_n与a之差换成了a_n与a_m之差。其好处在于无需借助数列本身以外的数a，只要根据数列本身的特征就可以鉴别其敛散性。

（5）柯西准则反映这样的事实：收敛数列各项的值越到后面，彼此越接近，以至于充分后面的任何两项之差的绝对值可以小于预先给定的任意小正数。或者形象地说，收敛数列的各项越到后面越是“挤”在一起。它是利用数列某项后任两项的距离来估计以判定数列的敛散性。

（6）柯西准则既能证明数列收敛，也能证明数列发散，我们可以给出柯西准则的否定形式：

数列$\{a_n\}$发散$\Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon_0>0,\ \forall N,\ \exists m_0\ ,n_0>N$，则$\left|a_{m_0}-a_{n_0}\right|\geqslant\varepsilon_0$；或数列$\{a_n\}$发散$\Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon_0>0,\ \forall N,\ \exists\ n_0>N,\ \forall p_0\in\mathbf{N}$，则$\left|a_{n_0+p_0}-a_{n_0}\right|\geqslant\varepsilon_0$。

4．区间套定理的条件与结论

（1）区间套定理是实数集特有的性质，在有理数集内一般不成立。

如由$\sqrt{2}$的不足近似值与过剩近似值组成的闭区间序列[1.4，1.5]，[1.41，1.42]，[1.414，1.415]，…，是一个闭区间套，满足区间套定理，但在有理数集中套不出有理数)。

（2）区间套定理的几何意义是有一列闭线段（两个端点也属于此线段），后者包含在前者之中，并且这些闭线段的长构成的数列以 0 为极限，则这一闭线段存在唯一的一个公共点。

（3）定理中的区间必须是闭区间，对于开区间、半开半闭区间列，结论可能不

成立。

如$\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}$和$\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right]\right\}$，虽然其中各个区间也是前一个包含后一个，且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-0\right)=0$，即满足区间套定理，但不存在属于所有区间的公共点（因公共点为 0）。

（4）若将定理中一个套一个的条件或者$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$去掉，结论可能不成立。

如$[a_n,b_n]=\left[n-\dfrac{1}{n+1},n+\dfrac{1}{n+1}\right]$都是闭区间，且满足$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，但不是一个套一个，显然不存在$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$或$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$的实数$\xi$，更谈不上$\xi$属于所有的闭区间。

再如，$[a_n,b_n]=\left[1+\dfrac{1}{n},2+\dfrac{1}{n}\right]$都是闭区间，且满足一个套一个，但$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=1\neq 0$，此时不存在定理中的$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。因为如果存在，一方面由$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$有$\xi=1$，另一方面由$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$有$\xi=2$。

（5）区间套定理的推论：若$\xi\in[a_n,b_n]\quad(n=1,2,\cdots)$是区间套$\{[a_n,b_n]\}$所确定的点，则对任给的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得当$n>N$时有$[a_n,b_n]\subset U(\xi;\ \varepsilon)$。

（6）闭区间套定理在分析数学中使用起来最为方便，它可以把套体性质收缩到局部一点。

5．聚点定理的条件与结论

（1）聚点定理是实数集特有的性质，在有理数集内一般不成立。

如$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$为有理数列，点集$\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$为有界无限点集，但在有理数集内无聚点。

（2）聚点定理中的无限性显然不能去掉，而去掉有界性，定理也不再成立。

如任何有限数集都没有聚点；正整数集N_+是无限点集但无界，所以没有聚点。

（3）聚点定理没有说明一个数集的聚点有几个。

如点集$S=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$有两个聚点$\xi_1=-1$和$\xi_2=1$;点集$S=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$只有一个聚点$\xi=0$; 又若$S$为开区间（$a,b$），则（$a,b$）内每一点以及端点$a$、$b$都是$S$的聚点；闭区间$[a,b]$的全体聚点的集合是$[a,b]$本身。

（4）点集S的聚点可以属于S，也可以不属于S。

（5）聚点的几个等价定义：

① 设S为数轴上的点集，ξ为定点，若ξ的任何邻域内都含有S中无穷多个点，则称ξ为点集S的一个聚点。

② 对于点集 S，若点 ξ 的任何 ε 邻域内都含有 S 中异于 ξ 的点，即 $\overset{\circ}{U}(\xi, \varepsilon)\cap S\neq\varnothing$，则称 ξ 为 S 的一个聚点。

③ 若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\}\subset S$，则其极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ 称为 S 的一个聚点。

（6）设 S 是数集，η 不是 S 的聚点 $\Leftrightarrow$ 存在 $\varepsilon_0>0$，在 $U(\eta,\varepsilon_0)$ 中至多包含 S 中有限多个点。

（7）单调数列 $\{x_n\}$ 若存在聚点，则聚点是唯一的，且是 $\{x_n\}$ 的确界。

（8）定理 7.5′：任一点列（数列）至少有一个聚点，且存在最大聚点（上极限）与最小聚点（下极限）。

① 单调有界定理是定理 7.5′ 的特殊情形：单调有界点列（数列）存在唯一聚点，该聚点对应的实数即为数列的极限值（此时上下极限相等），这时聚点、确界、极限点“三点统一”。

② 定理 7.5′ 是定理 7.5（聚点定理）的特殊情形：因为点列（数列）可视为直线上的无限点集。

③ 致密性定理是定理 7.5（聚点定理）的特殊情形，一般的教科书上，致密性定理是作为聚点定理的推论出现的；定理 7.5′ 与致密性定理是等价的。

（9）数列的聚点与极限点的关系：一个数列若收敛，则只有一个极限点，一个数列不论是否收敛，都有可能存在一个或多个聚点，因为可能有一个或多个收敛子列。若 ξ 为数列 $\{x_n\}$ 的极限点，则在 ξ 点的某邻域内聚集着数列从某一项以后的所有项；若在 ξ 点的某邻域内聚集着数列的无限项（不必要求从某一项以后的所有项），则 ξ 为数列 $\{x_n\}$ 的聚点。因此聚点是对极限点的拓展与引伸。

6．致密性定理的条件与结论

（1）致密性定理是实数集特有的性质，在有理数集内一般不成立。

（2）若致密性定理中的有界性去掉，则有下面的结论：若数列 $\{a_n\}$ 是一个无界数列，则存在子数列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $a_{n_k}\to\infty\ (k\to\infty)$。

（3）致密性定理一般是作为聚点定理的特殊情形和推论给出的，所以在这里不再讨论。

7．有限覆盖定理的条件与结论

（1）有限覆盖定理是实数集特有的性质，在有理数集内一般不成立。

（2）有限覆盖定理的结论只对闭区间 $[a,b]$ 成立，而对开区间、半开半闭区间则不一定成立。

如开区间集 $\left\{\left(\dfrac{1}{n+1},1\right)\right\}(n=1,2,\cdots)$ 构成了开区间 $(0,1)$ 的一个开覆盖，但不能从中选出有限个开区间盖住 $(0,1)$；

开区间集$\left\{\left(\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n}\right)\right\}(n=1,2,\cdots)$构成了开区间$(0,1)$的一个开覆盖，但不能从中选出有限个开区间盖住$(0,1)$；

开区间集$\left(0,\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),\cdots,\left(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2}\right),\cdots$构成了开区间$(0,1)$的一个开覆盖，但不能从中选出有限个开区间盖住$(0,1)$。

再如，半开半闭区间集$\left[0,\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right),\cdots,\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}\right),\cdots$及$[1,2]$覆盖了闭区间$[0,2]$，但不能从中选出有限个区间盖住$[0,2]$。

（3）有限覆盖定理是一个非常重要的定理，它与聚点定理所描述的性质通常称为紧性，在现代分析中起着很重要的作用，有限覆盖定理形式上说的是无穷转化为有穷：若闭区间能被某个开区间簇（常有无穷多个开区间）覆盖，则它同样能被这个开区间簇中的有限个开区间所覆盖，这样它在结构上的特点和闭区间套定理构成一对相辅相成的和谐的完美统一的关系，即闭区间套定理是将整体性转化为（点的邻域）局部性，而有限覆盖定理，则常将局部性（每个点的邻域所含性质）转化为整体（整个闭区间）性。

7.3.2　实数连续性定理的内在联系及等价性

实数连续性从不同侧面刻画了实数的连续性（完备性），这些定理是可以相互推证的，它们之间存在着内在联系与本质上的一致性，是相互等价的。

（1）致密性定理是对单调有界定理的补充，单调有界定理是确界存在定理的特例。

（2）致密性定理是聚点定理的特殊情形，一般的教科书上，致密性定理是作为聚点定理的推论出现的。

（3）区间套定理与有限覆盖定理从两个不同的角度揭示了“整体”（区间）与“局部”（点的小邻域）的关系，提供了证明问题的两种不同的归结方法。

（4）单调有界定理与柯西收敛准则给出了两种证明数列收敛的方法。前者是充分条件，一般既能证明数列收敛，也能求出数列的极限；后者是充要条件，一般只能证明数列收敛，不能求出数列的极限。

7.3.3　实数连续性定理所提供的数学方法

1．应用实数连续性定理证明问题的方法

确界存在定理、单调有界定理、柯西收敛准则、区间套定理、聚点定理、致密性定理的条件是刻画问题的整体性质，而结论是刻画问题的局部性质，这些定理是实现整体向局部转化的重要数学方法。所以，要证问题的结论涉及一点的存在性或一点邻域的局部性质，用这些定理比较妥当，比如证明“闭区间上连续函数的最值

性定理”，由于要证问题的条件“函数在闭区间上连续”是整体性质，而要证问题的结论“存在最值点”是局部性质，因此可用确界存在定理、区间套定理、聚点定理等来证明。

而有限覆盖定理则相反，它的结论是整体性质，是由“无穷个”点的局部性质向闭区间上整体性质的转化。所以，要证问题的结论涉及某区间上的整体性质，用有限覆盖定理比较妥当，比如证明“闭区间上连续函数的一致连续性定理”，由于要证问题的条件“函数在闭区间上每点连续（端点单侧连续）”属于无穷个点的局部性质，而要证问题的结论“一致连续”是该函数在该区间上的整体性质，因此用有限覆盖定理来证明是最恰当的。

我们能否用确界存在定理、单调有界定理、柯西收敛准则、区间套定理、聚点定理、致密性定理证明结论是整体性质的数学问题，用有限覆盖定理证明结论是局部性质的数学问题呢？回答是肯定的，这只须用反证法即可。因为用反证法证明问题时，首先作出与要证结论相反的假设。此时，要证问题的局部性质（或整体性质）变成了反证假设的整体性质（或局部性质），应用有限覆盖定理（或确界存在定理、单调有界定理、柯西收敛准则、区间套定理、聚点定理、致密性定理）可导出矛盾，使问题获证。

2．应用实数连续性定理证明问题的关键与技巧

（1）闭区间套定理的应用关键与技巧

应用闭区间套定理证明问题的关键与技巧是针对要证明的数学命题，恰当构造闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$：一方面，这样的闭区间套必须是闭、缩、套，即$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$（$n=1,2,\cdots$），$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$；另一方面，也是最重要的，要把所证命题的本质属性保留在闭区间套的每一个闭区间中。前者是区间套定理本身条件的要求，保证所有区间$[a_n,b_n]$存在唯一公共点ξ；后者则把证明整个区间$[a,b]$上所具有某性质的问题归结为ξ点邻域$U(\xi,\delta)$的性质，圆满实现“整体”向“局部”的转化。

数学分析中的许多定理，应用闭区间套定理来证明，显得直观和易于接受，它的主要特点是把整体性质收缩到某一点的任意邻域，达到“化整为零”的效果。正像上面所说，构造一个满足一定条件的闭区间套，然后由区间套套出一个公共点，这个点往往就是满足问题所要求的点。这类问题的模式有两种。

模式一：证明存在某一个点具有性质 P

证明步骤：第一步，构造第一个闭区间$[a_1,b_1]$具有性质 P^*（性质 P^*根据性质 P 来选定）；第二步，常用二等分法，作出满足闭区间定理条件的闭区间序列$\{[a_n,b_n]\}$（$n=1,2,\cdots$），使每一个$[a_n,b_n]$都具有性质 P^*；第三步，根据闭区间定理得出唯一的一个点$\xi\in[a_n,b_n]$（$n=1,2,\cdots$），且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$；第四步，利用上式和每个$[a_n,b_n]$都具有的性质 P^*，证明点ξ具有性质 P。

模式二：证明某区间具有性质 P

证明方法：往往采用反证法，将此类问题转化为上述的模式一。

（2）有限覆盖定理的应用关键与技巧

应用有限覆盖定理证明问题的关键与技巧是针对要证明的数学命题，恰当地构造已知有限闭区间$[a,b]$的一个无限开覆盖H：一方面，H中的每个区间都是开的，H的全体确实一点不漏地覆盖整个区间$[a,b]$；另一方面，要把所证问题的本质属性保留在开覆盖H中的每个开区间内。前者是有限覆盖定理本身条件的要求，保证有限开覆盖$H^* \subset H$的存在性；后者则把每个开区间上所具有的“局部”性质扩充到整个区间上。

有限覆盖定理揭示了闭区间的一个本质属性，叫做“紧致性”。有限覆盖定理是把闭区间上每一点的局部性质扩充到整个闭区间上整体性质的一种方法。一般来说，每个小区间上都具有的局部性质不能形式地扩充到无限多个小区间覆盖的大区间上去，但能扩充到有限多个小区间覆盖的大区间上去。有限覆盖定理的特点就是把“无限”转化为“有限”，因为许多问题对“无限”的情形是不确定或不清楚的，但对“有限”的情形是确定或清楚的。这类问题的模式有两种：

模式一：证明闭区间$[a,b]$具有性质 P

证明步骤：第一步，证明对于闭区间$[a,b]$中的每一个点x，都有一个邻域$(x-\delta_x, x+\delta_x)$，此邻域具有性质 P，所有这样的邻域构成了一个开区间集H，覆盖$[a,b]$；第二步，根据有限覆盖定理，可以从H中选出有限个开区间$(x_1-\delta_1, x_1+\delta_1)$、$(x_2-\delta_2, x_2+\delta_2)$、…、$(x_k-\delta_k, x_k+\delta_k)$覆盖$[a,b]$；第三步，利用$(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)$ $(i=1,2,\cdots,k)$具有性质 P，证明闭区间$[a,b]$具有性质 P。

模式二：证明存在某一个点具有性质 P

证明方法：往往采用反证法，将此类问题转化为上述的模式一。

（3）确界存在定理与单调有界定理的应用关键与技巧

应用确界存在定理与单调有界定理证明数学命题的思路是基本相同的，关键是针对所证命题的特点，先抽象或构造一个有界数集或单调有界数列，然后剖析确界或极限值的性质，得出所证结论。

确界存在定理的作用是确定一个数（非空有界数集的上确界或下确界），在证明问题中需要找到一个具有性质 P 的数，这时可以考虑使用确界定理。用确界定理论证一些理论问题时，方法往往很简洁、很巧妙。它的基本步骤是：首先给出的条件、结论，构造一个有界数集，使其确界就是证明问题中需要找到的具有性质 P 的数，其次再证明此数合乎问题的需要。

单调有界定理的作用是确定一个数（单调有界数列的极限），在证明问题中需要找到一个具有性质 P 的数，这时可以考虑使用单调有界定理。它的基本步骤是：设想所求数是某一单调上升或下降且有界数列的极限，根据性质 P 构造一个单调有界数列，使其极限就是证明问题中需要找到的具有性质 P 的数，其次再证明此数合乎问题的需要。

（4）聚点定理与致密性定理的应用关键与技巧

应用聚点定理与致密性定理证明数学命题的思路是基本相同的，致密性定理是

聚点定理的推论。应用聚点定理，一般是先将已知命题转化为直线上的有界无限点集，然后剖析聚点的性质，得出所证结论。应用致密性定理是先从已知数列（点列）中抽出收敛子列，再由收敛子列及其极限值的性质引出所证结论，其中抽子列的技巧应予以足够重视。基本步骤是：首先给出的条件、结论，构造一个有界数列，然后利用致密性定理得一收敛子列（或此收敛子列的极限），再利用相关条件证明原问题成立。

（5）柯西收敛准则的应用关键与技巧

我们以数列收敛的柯西准则为例来简单说明，数列收敛的柯西准则提供了仅仅从数列本身具有的性质判断该数列是否收敛的方法，它与实数理论的建立、空间完备性概念的引入有着密切的关系，在理论上具有重要意义。

柯西收敛准则的作用是确定一个数（柯西数列的极限），在证明问题中需要找到一个具有性质 P 的数，这时可以考虑使用柯西收敛准则。它的基本步骤是：设想所求数是某一数列的极限，根据性质 P 构造一个数列，证明此数列为柯西数列，从而得到其极限就是问题中需要找的具有性质 P 的数，其次再证明此数合乎问题的需要。

应用数列收敛的柯西准则去证明问题时，一般是从解不等式 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 入手，找满足关系式的 N，需要注意的是 N 只与 ε 有关而与 p 无关。

7.3.4　实数连续性定理所提供的工具

实数连续性定理是研究数列极限与函数极限的得力工具，它们是极限理论的基石。数列的收敛性问题是研究数列的重要课题，数列收敛的定义、柯西准则是判断数列收敛的充要条件，单调有界定理提供了数列收敛的一个充分条件，但对于不单调的数列是否收敛的问题应如何进一步研究呢？

首先，对无穷数列 $\{x_n\}$，令 $S=\{x_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 显然是一个无限点集。聚点定理指出，有界数列必有聚点，而有聚点，则必存在一个以聚点为极限点的收敛子数列。若聚点唯一，则该数列必收敛，若聚点不唯一，则数列本身不收敛，但可从中选出分别以各聚点为极限点的若干个收敛子数列来。这就提供了研究不收敛数列性质的一条有效途径。

其次，聚点定理还指出，无界数列必有非正常聚点（$\pm\infty$），即存在以 $+\infty$（或 $-\infty$）为极限的子数列。这就从一个侧面揭示了无界数列与极限为 $+\infty$（或 $-\infty$）数列的联系与区别。

对于函数 $y=f(x)$，$x\in X$ 的研究，可将函数的值域 $S=\{f(x),x\in X\}$ 视为数集（或直线上的点集）。若 S 为无限点集，聚点定理照样可用。若 $f(x)$ 为 X 上的有界函数（即 S 有界），则 S 存在正常聚点，即可选出以聚点为极限点的收敛点列 $\{f(x_n),x_n\in X\}$。对函数 $y=f(x)$ 的极限研究，我们以 $x\to x_0$ 为例，若 $\forall x_n\to x_0$，$x_n\in X$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$；反之亦然，即海涅定理。若 $f(x)$ 在 X 无界（即 S 无界），则 $\exists x_n\in X$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$（或 $-\infty$）。

7.4 实数连续性定理的推广

7.4.1 确界存在定理的推广

确界概念的扩充：若把$+\infty$和$-\infty$补充到实数集中，并规定一实数 a 与$+\infty$、$-\infty$的大小关系为：$a<+\infty$，$a>-\infty$，$-\infty<+\infty$，则确界概念可扩充为，若 S 无上界，则定义$+\infty$为 S 的**非正常上确界**，记作 $\sup S=+\infty$；若要无下界，则定义$-\infty$为 S 的**非正常下确界**，记作 $\inf S=-\infty$，相应地，前面所定义的确界分别称为**正常上、下确界**。

推广 7.1（推广的确界存在定理）

任一非空数集必有上、下确界（正常的或非正常的）。

例如，正整数 N_+有 $\inf N_+=1$，$\sup N_+=+\infty$，数集 $S=\left\{y\middle|y=2-x^2,x\in R\right\}$ 的 $\inf S=-\infty$，$\sup S=2$。

下面仅给出 R^2 空间上的确界存在定理，其证明以及 R^n 空间上的确界存在定理可参考相关文献。

推广 7.2（R^2 空间上的确界存在定理)

设 $A\subset R^2$ 是非空点集，若 A 有上界，则 A 必有极小上界，若 A 有下界，则 A 必有极大下界。

7.4.2 单调有界定理的推广

下面仅给出 R^2 空间上的单调有界定理，其证明以及 R^n 空间上的单调有界定理可参考相关文献。

推广 7.3（R^2 空间上的单调有界定理）

设 $\{P_n\}\subset R^2$ 是一列单调有界点列，则 $\{P_n\}$ 必有极限。

7.4.3 柯西收敛准则的推广

下面仅给出 R^2 空间上的柯西收敛准则，其证明以及 R^n 空间上的柯西收敛准则可参考相关文献。

推广 7.4（R^2 空间上的柯西收敛准则）

平面点列 $\{P_n\}\subset R^2$ 收敛的充要条件是任给正数 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对一切正整数 P 都有 $\rho(p_n,p_{n+p})<\varepsilon$。

7.4.4 区间套定理的推广

推广 7.5（半开半闭区间套定理）

若半开半闭区间列 $\{(a_n,b_n]\}$ 满足：

（i）$a_n<a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n,n=1,2,\cdots$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则存在唯一的一点ξ，使得$\xi \in (a_n, b_n], n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

推广 7.6（半开半闭区间套定理）

若半开半闭区间列$\{[a_n, b_n)\}$满足：

（i）$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} < b_n, n=1,2,\cdots$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，

则存在唯一的一点ξ，使得$\xi \in [a_n, b_n), n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

推广 7.7（开区间套定理）

若开区间列$\{(a_n, b_n)\}$满足：

（i）$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n, n=1,2,\cdots$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，

则存在唯一的一点ξ，使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

注　定理只能保证ξ点的存在性，不能保证$\xi \in (a_n, b_n), n=1,2,\cdots$。

例如开区间列$\left\{\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$和$\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$均满足定理 2 的条件，但$\xi_1 = 0, \xi_2 = 1$。要保证$\xi$属于所有的开区间，只需将开区间套变为严格的，有下面的定理。

推广 7.8（开区间套定理）

若开区间列$\{(a_n, b_n)\}$满足：

（i）$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n, n=1,2,\cdots$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，

则存在唯一的一点ξ，使得$\xi \in (a_n, b_n), n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

证明　做闭区间列$\{[x_n, y_n]\}$，其中$x_n = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}, y_n = \dfrac{b_n + b_{n+1}}{2}, n=1,2,\cdots$，由于$a_n < x_n < a_{n+1}, b_{n+1} < y_n < b_n$，故有

（1）$(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset [x_n, y_n] \subset (a_n, b_n)$，从而$[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n], n=1,2,\cdots$；

（2）$b_{n+1} - a_{n+1} < y_n - x_n < b_n - a_n$，从而由$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$得$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$。

所以$\{[x_n, y_n]\}$为闭区间套，由闭区间套定理知，存在一点ξ，使得$\xi \in [x_n, y_n], n=1,2,\cdots$，由（1）有$a_n < \xi < b_n, n=1,2,\cdots$。

点ξ的唯一性与闭区间套定理同样证得。

下面仅给出R^2空间上的区间套定理，其证明以及R^n空间上的区间套定理可参考相关文献。

推广 7.9（R^2空间上的闭域套定理）

设$\{D_n\} \subset R^2$是闭域列，它满足：

（i）$D_{n+1} \subset D_n, n=1,2,\cdots$；

（ii）$d_n = d(D_n), \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$，则存在唯一的点$p_0 \in D_n, n=1,2,\cdots$。

7.4.5　聚点定理的推广

下面仅给出 R^2 空间上的聚点定理，其证明以及 R^n 空间上的聚点定理可参考相关文献。

推广 7.10（R^2 空间上的聚点定理）

设 $E \subset R^2$ 为有界无限点集，则 E 在 R^2 中至少有一个聚点。

7.4.6　致密性定理的推广

下面仅给出 R^2 空间上的致密性定理，其证明以及 R^n 空间上的致密性定理可参考相关文献。

推广 7.11（R^2 空间上的致密性定理）

有界无限点列 $\{P_n\} \subset R^2$ 必存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$。

7.4.7　有限覆盖定理的推广

1．直线上有界闭集的有限覆盖定理

定义 1　设 S 为直线上的点集，x_0 为直线上的一点，若存在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，使得 $U(x_0) \subset S$，则称点 x_0 为点集 S 的内点。

定义 2　若直线上的点集 S 的每一点都是 S 的内点，则称 S 为开集。

定义 3　若直线上的点集 S 的所有聚点都属于 S，则称 S 为闭集。

推广 7.12（直线上有界闭集的有限覆盖定理）

若 S 是直线上的一个有界闭集，H 为直线上的一个开集族，则在 H 中必存在有限个开集覆盖 S。

2．开区间的有限覆盖定理

推广 7.13（开区间的有限覆盖定理）

设 H 为开区间 (a,b) 的一个无限开覆盖，对 (a,b) 的任一聚点 x_0，存在一个 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta_0)$，若 H 中可选出有限个开区间覆盖 $U(x_0,\delta_0)$，则 H 中能选出有限个开区间覆盖 (a,b)。

证明　反证法。

假设不能用 H 中的有限个开区间覆盖 (a,b)。

因 (a,b) 是有界集，它必包含在某一闭区间 $[c,d]$ 内，将 $[c,d]$ 二等分为两个子区间，则其中至少有一个小闭区间不能用 H 中的有限个开区间来覆盖，记这个小闭区间为 $[c_1,d_1]$，再将 $[c_1,d_1]$ 二等分为两个子区间，同样其中至少有一个小闭区间不能用 H 中的有限个开区间来覆盖，记这个小闭区间为 $[c_2,d_2]$，重复上述步骤，得一闭区间列 $\{[c_n,d_n]\}$，满足闭区间套定理，故存在唯一的一点 ξ，使得 $\xi \in [c_n,d_n]$，$n=1,2,\cdots$。

下面证明 ξ 是 (a,b) 的聚点。

由假设对每一个 $[c_n,d_n], n=1,2,\cdots$，(a,b) 在 $[c_n,d_n]$ 内的点都不能被有限覆盖，

故在$[c_n,d_n]$内必含有(a,b)的无穷多个点，对于ξ的任一邻域$U(\xi,\delta)$，由于$[c_n,d_n]$的长度当n增大时趋于0，故存在某个N，当$n>N$时，$[c_n,d_n]$全落在$U(\xi,\delta)$内，即含有无穷多个(a,b)的点，于是ξ是(a,b)的聚点。

对于任一确定的邻域$U(\xi,\delta)$，存在某个小区间$[c_n,d_n]$全落在$U(\xi,\delta)$内，而(a,b)在$[c_n,d_n]$内的点不能被有限覆盖，自然(a,b)在$U(\xi,\delta)$内的点不能被有限覆盖，矛盾！故得证。

3．满覆盖定理

有限覆盖定理用的是开区间集覆盖闭区间，下面介绍的满覆盖定理则用闭区间集覆盖闭区间，它们都是将无限覆盖转化为有限覆盖。

定义（满覆盖） 设H是$[a,b]$的闭子区间组成的集合，如果对每个$x\in[a,b]$，相应地有一个正数δ_x，使得$[a,b]$中每个含x，且长度小于δ_x的闭子区间都属于H，则称H为$[a,b]$的满覆盖。

也就是说，若$\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0$，记$A_x=\{[\alpha,\beta]\,|\,[\alpha,\beta]\subset[a,b],x\in[\alpha,\beta],\beta-\alpha<\delta_x\}$，则$H=\{[\alpha,\beta]\,|\,[\alpha,\beta]\in A_x,x\in[a,b]\}$是$[a,b]$的满覆盖。以后称$H$为由$\delta_x$所给出的$[a,b]$的满覆盖。

显然，若H满覆盖$[a,b]$，$\forall[c,d]\subset[a,b]$，则在H中必有一个子集合满覆盖$[c,d]$。

推广 7.14（满覆盖定理）

设H为$[a,b]$的满覆盖，则在H中包含一个$[a,b]$的有限分割$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，即$\exists\{x_k\}\Big|_{k=0}^{n}\subset[a,b],\bigcup\limits_{k=0}^{m-1}[x_k,x_{k+1}]=[a,b]$，且其中任一个$[x_k,x\ ]\in H$。

4．多维空间上的有限覆盖定理

下面仅给出R^2空间上的有限覆盖定理，其证明以及R^n空间上有限覆盖定理可参考相关文献。

推广 7.15（R^2空间上的有限覆盖定理)：设$D\subset R^2$为一有界闭域，H为一开域族，它覆盖了D，则在H中必存在有限个开域覆盖了D。

7.5 实数连续性定理的应用

7.5.1 确界存在定理的应用

1．利用确界存在定理证明某个点（数）具有某种性质

确界存在定理的作用是确定一个数（非空有界数集的上确界或下确界），在证明问题中需要找到一个具有性质P的数。用确界定理论证一些理论问题时，方法往往很简洁、很巧妙。它的基本步骤是首先给出的条件、结论，构造一个有界数集（这个有界数集的构造是个难点），使其确界就是问题中需要找的具有性质P的数，其次再证明此数即为所求。

例 7.1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，证明在 (a,b) 内存在一点 c 使 $c=\max\ \{x\mid f(x)=0,x\in(a,b)\}$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在最大零点。

分析　不妨设 $f(a)<0,f(b)>0$，因要证的点 c 为最大零点且 $f(b)>0$，所以即证 $c\in(a,b),f(c)=0$ 且对任意的 $x\in[c,b],f(x)>0$。最大零点 c 为所求的“具有性质 P 的数”，首先构造数集 E，使其上确界为 c，再证 c 为最大零点。因为 c 为零点中的一个，所以数集 E 可构造为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的所有零点的集合，即 $E=\{x\mid f(x)=0,$ $x\in[a,b]\}$，只需证明此数集满足确界存在定理，故存在上确界 c，且 $c\in E$。

证明　由根的存在性定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$。

若只有有限个 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$，则可找出最大的 ξ 点作为 c，得证。

若有无穷多个零点，记 $E=\{x\mid f(x)=0,x\in[a,b]\}$，则 E 为非空有界数集，由确界定理知必存在上确界，设 $c=\sup E,c\in(a,b)$。下面证明 $c\in E$，即 $f(c)=0$。

由上确界的定义知，$\forall\varepsilon>0,\exists x'\in E$ 使 $c-\varepsilon<x'\leqslant c$，取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，可得 $x_n\in E$ 使 $c-\dfrac{1}{n}<x'\leqslant c$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$；由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_n\in E\subset[a,b]$ 得 $f(c)=$ $f\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$。

例 7.2　设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的增函数但不连续，若 $f(a)\geqslant a,f(b)\leqslant b$，则存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=c$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在不动点。

分析　题目要证存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=c$，所以 c 为所求的“具有性质 P 的数”，首先构造数集 E，使其上确界为 c，再证 c 为不动点。因为 $f(x)$ 为增函数，所以数集 E 可构造为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的所有使得 $f(x)\geqslant x$ 的点，即 $E=\{x\mid f(x)\geqslant x,$ $x\in[a,b]\}$。

证明　设 $E=\{x\mid f(x)\geqslant x,x\in[a,b]\}$，则 E 为非空有界数集，由确界定理知必存在上确界，设 $c=\sup E$，因 $\forall x\in E$，$f(x)\leqslant f(c),x\leqslant f(x)$，所以 $c\leqslant f(c)$；又因 $a\leqslant c\leqslant f(c)\leqslant f(b)\leqslant b$ 且 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的增函数，所以 $f(c)\leqslant f[f(c)]$，从而 $f(c)\subset E$，而 c 为 E 的上确界，故 $f(c)\leqslant c$，从而 $f(c)=c$。

例 7.3　设 $f(x)$ 定义在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内，且对任意的 $x_1,x_2\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，当 $x_1<x_2$ 时 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 严格增加。证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的每一点严格增加，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格增加。

分析　要证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格增加，只需证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的任意闭子区间上严格增加。由条件知，对每个 $c\in[a,b)$，存在 $x\in(c,b]$ 使 $f(c)<f(t)$ 对一切 $c<t\leq x$ 成立，只要证 b 是具有上述性质的最大的 x，为此数集 E 可构造为

$$E=\{x\mid 任取c\in[a,b),x\in(c,b],f(x)在[c,x]上严格增加\}$$

证明　任取 $c\in[a,b)$，做数集

$$E=\{x\mid 任取c\in[a,b),x\in(c,b],f(x)在[c,x]上严格增加\}$$

由题设知，E 为非空有界数集，由确界定理知必存在上确界，设 $\beta=\sup E$。

若 $\beta<b$，因 $f(x)$ 在点 β 严格增加，所以存在 $\delta:0<\delta<b-\beta$，使 $f(x)$ 在 $(\beta-\delta,\beta+\delta)$ 内严格增加，所以 $\beta'=\beta+\dfrac{\delta}{2}\in E$，这与 $\beta=\sup E$ 矛盾。

故 $\beta=b$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格增加。

例 7.4 利用确界存在定理证明单调有界定理，即证单调有界数列必有极限。

分析 只证递增有上界数列 $\{x_n\}$ 的情形，要证有极限 ξ，则 ξ 为“具有性质 P 的数”，首先构造数集 E，使其上确界为 ξ，再证 ξ 为数列 $\{x_n\}$ 的极限。数集 E 可构造为 $E=\{x_n\mid n=1,2,\cdots\}$。

证明 略。（见 7.2 节）。

2．利用确界存在定理证明数列或函数的性质

例 7.5：设 $f(x)$ 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的增（减）函数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上（下）界。

证明 必要性：

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，由函数极限的局部有界性知，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时有 $f(x)<1+|A|$，而对任意的 $x\in[a,X]$，由 $f(x)$ 递增知，$f(x)<f(X)$。

取 $M=\max\{1+|A|,f(X)\}$，则 $\forall x\in[a,+\infty)$ 有 $f(x)<M$。

充分性：

因 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上递增有上界，故由确界存在定理知必有上确界。

记 $A=\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$，由上确界的定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\forall x\in[a,+\infty)$，有 $f(x)\leqslant A<A+\varepsilon$，$\exists x_0>a$，使 $A-\varepsilon<f(x_0)$。

取 $M=x_0$，则当 $x>M$ 时，由 $f(x)$ 递增得 $A-\varepsilon<f(x_0)<f(x)$。

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

例 7.6 若 $f(x)$ 是定义在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 上的单调有界函数，证明：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 都存在。

证明 不妨设 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}_+(x_0)$ 上递增有界，则由确界存在定理知必有下确界 A，由下确界的定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists f(x')$ 使 $f(x')<A+\varepsilon$；取 $\delta=x'-x_0$，则当 $0<x-x_0<\delta$ 时必有 $x<x'$；从而 $f(x)\leqslant f(x')$；又 $\forall x>x_0$，有 $f(x)\geqslant A>A-\varepsilon$；故 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$。即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

若 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}_-(x_0)$ 上递增有界，类似可证 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在且等于上确界。

例 7.7 应用确界定理证明闭区间上连续函数的有界性定理。

证明 令 $E=\{x\mid x\in[a,b],f(t)\text{在}[a,x]\text{上有界}\}$，因 $a\in E$，所以 E 非空有界，故有上确界，记 $\eta=\sup E$，由于 $f(x)$ 在 a 点连续，根据连续函数的局部有界性知，$\eta\neq a$。

下面证明$\eta=b$。用反证法。

假设$\eta<b$，由$f(x)$在η点连续，则存在$\delta>0$，使得$f(x)$在$(\eta-\delta,\eta+\delta)$有界，又因$\eta$是$E$的上确界，所以$f(x)$在$[a,\eta-\delta]$上有界，从而知$f(x)$在$\left[a,\eta+\dfrac{\delta}{2}\right]$上有界，于是$\eta+\dfrac{\delta}{2}\in E$，这与$\eta$的定义矛盾，故$\eta=b$。

从上面证明易见$\eta\in E$，即$b\in E$，即$f(x)$在$[a,b]$上有界。

7.5.2　单调有界定理的应用

1．利用单调有界定理证明数列收敛

因为单调有界定理是数列收敛的一个充分条件，所以我们经常利用单调有界定理证明数列收敛，有时还可以根据递推关系式求出极限值。

例 7.8　利用单调有界定理证明下列各题：

（1）设$a_n=1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}$（$\alpha\geqslant 2$），证明$\{a_n\}$收敛；

（2）设$a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^n}$，证明$\{a_n\}$收敛；

（3）设 $a_n=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$，证明$\{a_n\}$收敛，并求其极限；

（4）设$x_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$，证明$\{a_n\}$收敛；

（5）设$a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$，证明$\{a_n\}$收敛；

（6）设$a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{2\cdot 4\cdots(2n)}$，证明$\{a_n\}$收敛。

证明　（1）由$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}>a_n$知$\{a_n\}$递增，而

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$
$$<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<2-\frac{1}{n}<2$$

即$\{a_n\}$有上界。

故由单调有界定理知，数列$\{a_n\}$收敛。

（2）由$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}>0$知$\{a_n\}$递增，而

$$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$
$$<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<2-\frac{1}{n}<2$$

即 $\{a_n\}$ 有上界。

故由单调有界定理知，数列 $\{a_n\}$ 收敛。

（3）由 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{2n+1}<1$ 知 $\{a_n\}$ 递减，又 $\{a_n\}$ 有下界 0，故由单调有界定理知，数列 $\{a_n\}$ 收敛。

由 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n+1}a_n$，可得 $\{a_n\}$ 的极限为 0。

（4）易知 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1-\dfrac{1}{2^{n+1}}<1$，即 $\{x_n\}$ 递减；又 $x_n>0$，即 $\{x_n\}$ 有下界 0。

故由单调有界定理知，数列 $\{x_n\}$ 收敛。

（5）显然 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{3^{n+1}+1}>a_n$，即 $\{a_n\}$ 递增，又

$$a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}<\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{2}$$

即 $\{a_n\}$ 有上界 $\dfrac{1}{2}$。

故由单调有界定理知，数列 $\{a_n\}$ 收敛。

（6）因 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2\cdot4\cdots(2n)(2n+2)}>a_n$，所以 $\{a_n\}$ 递增，又

$$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot4\cdots(2n)}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}<1$$

即 $\{a_n\}$ 有上界 1。

故由单调有界定理知，数列 $\{a_n\}$ 收敛。

例 7.9 利用单调有界定理证明下列各题：

（1）设 $x_1=2,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（2）设 $a_1=a>0,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限；

（3）设 $a>0$，$x_0>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（4）设 $x_1>a>0$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n^2-2ax_n+2a^2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（5）设 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{6}{7}+\dfrac{a_n^3}{7}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限；

（6）设 $a_n>0$，$a_{n+1}+\dfrac{1}{a_n}<2$，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限。

证明 （1）显然 $x_n>0$，由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\dfrac{1}{x_n}}=1$（平均值不等式）知，数列 $\{x_n\}$ 有下界 1，又 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)-x_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_n}-x_n\right)<0$

得数列 $\{x_n\}$ 单调下降。

故由单调有界原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$。在 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$ 两边取极限得 $l=\dfrac{1}{2}\left(l+\dfrac{1}{l}\right)$。解得 $l=1,l=-1$（舍去）。所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

（2）先证 $\{a_n\}$ 有下界。

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{a}{a_n}}=\sqrt{a},$$

再证 $\{a_n\}$ 递减。

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a}\right)=1$$

在 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$ 两边取极限得 $\{a_n\}$ 的极限为 $\sqrt{a}$。

（3）由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(x_n+x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{x_n\cdot x_n\cdot\dfrac{a}{x_n^2}}=\sqrt[3]{a}$ 知 $\{x_n\}$ 有下界；由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(x_n+x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{3}\left(x_n+x_n+\dfrac{x_n^3}{x_n^2}\right)=x_n$ 知 $\{x_n\}$ 单调递减。

所以由单调有界原理得数列 $\{x_n\}$ 收敛，易求得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{a}$。

（4）显然有 $x_{n+1}=\sqrt{(x_n-a)^2+a^2}\geqslant a>0$，又 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{1+2a\left(\dfrac{a}{x_n}-1\right)}\leqslant 1$，即 $\{x_n\}$ 单调减小，且有下界，故存在极限，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则对 $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2-2ax_n+2a^2}$ 两边取极限，得 $A=\sqrt{A^2-2aA+2a^2}$，即 $A=a$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

（5）由 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 知 $0<a_1<1$，根据 $a_{n+1}=\dfrac{6}{7}+\dfrac{a_n^3}{7}$，由数学归纳法可证 $0<a_n<1$，即 $\{a_n\}$ 有界，再有 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{7}(a_n-a_{n-1})(a_n^2+a_na_{n-1}+a_{n-1}^2)$ 可知 $\{a_n\}$ 递增，

所以由单调有界原理得数列$\{a_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$，则由$l^3-7l+6=0$可解得$l=1$。

（6）由$a_{n+1}+\dfrac{1}{a_n}<2=2\sqrt{a_n\cdot\dfrac{1}{a_n}}<a_n+\dfrac{1}{a_n}$知$a_{n+1}<a_n$，即$\{a_n\}$递减，又$a_n>0$，即$\{a_n\}$有下界。

所以由单调有界原理得数列$\{a_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$，易解得$l=1$。

例 7.10 利用单调有界定理证明下列各题：

（1）设$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\cdots$，$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n重根号),…，证明$\{a_n\}$收敛，并求其极限；

（2）证明数列$\sqrt{a},\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个根号}},\cdots$ $(a>0)$收敛，并求它的极限；

（3）设$a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$（$n=1,2,\cdots$）证明$\{a_n\}$收敛，并求其极限。

证明 （1）先证数列$\{a_n\}$递增。

因$a_1<a_2$，若$a_{k-1}<a_k$，则$2+a_{k-1}<2+a_k$，即$\sqrt{2+a_{k-1}}<\sqrt{2+a_k}$，所以$a_k<a_{k+1}$，故由数学归纳法可知$\{a_n\}$递增。

再证$\{a_n\}$有上界$\sqrt{2}+1$。

因$a_1=\sqrt{2}<\sqrt{2}+1$，若$a_k<\sqrt{2}+1$，则

$$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+\sqrt{2}+1}<\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

故由数学归纳法可知$\{a_n\}$有上界$\sqrt{2}+1$。

故由单调有界定理知，数列$\{a_n\}$收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$，在$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$两边令$n\to\infty$取极限，得$l=\sqrt{2+l}$，解出$l=2$，$l=-1$（舍去），故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$。

（2）令$x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个根号}}$，则$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$。

显然$x_1<x_2$，假设$x_{k-1}<x_k$，则有$a+x_{k-1}<a+x_k$，从而$x_k<x_{k+1}$，故由数学归纳法，对一切n，都有$x_n<x_{n+1}$，即数列$\{x_n\}$递增。

其次证明数列$\{x_n\}$有上界。

显然$x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$，假设$x_k<\sqrt{a}+1$，则

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}<\sqrt{a}+1$$

故由数学归纳法，对一切n，都有$x_n<\sqrt{a}+1$，即数列$\{x_n\}$有上界。

根据单调有界原理，数列$\{x_n\}$收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，则也有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = l$，由 $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$ 有 $x_{n+1}^2 = a + x_n$，在 $x_{n+1}^2 = a + x_n$ 的两边令 $n\to\infty$ 取极限，得 $l^2 = a + l$，取正根得 $l = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4a}\right)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4a}\right)$。

（3）设 $\sqrt{2} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} < \cdots$，即 $\{a_n\}$ 递增；又 $a_1 = \sqrt{2} < 2, a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^2 = 2,\cdots$，若 $a_n < 2$，则 $a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n} < \sqrt{2}^2 = 2, n = 1,2,\cdots$，故由数学归纳法，$\{a_n\}$ 有上界 2。

根据单调有界原理，数列 $\{a_n\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，在 $a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$ 的两边求极限得 $a = \left(\sqrt{2}\right)^a$，即 $a^2 = 2^a$，故 $a = 2$，$a = 0$（舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$。

例 7.11　利用单调有界定理证明下列各题：

（1）设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限；

（2）设 $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \dfrac{-1}{2+x_n}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限；

（3）设 $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{4+3x_n}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限；

（4）设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限；

（5）设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(2-x_n)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

证明　（1）由数学归纳法易推出 $\{x_n\}$ 递增，又由 $x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} < 1 + 1 = 2$ 知 $\{x_n\}$ 有上界 2，根据单调有界原理，数列 $\{a_n\}$ 收敛。

在 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n}$ 两边取极限，可得 $\{x_n\}$ 的极限为 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

（2）显然 $x_1 > -1$，若设 $x_n > -1$，则 $2 + x_n > 1$，可得 $x_{n+1} = \dfrac{-1}{2+x_n} > -1$，故由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有下界 -1；又 $x_{n+1} - x_n = \dfrac{-1}{2+x_n} - x_n = -\dfrac{(1+x_n)^2}{2+x_n} < 0$，故 $\{x_n\}$ 递减。

由单调有界定理知，数列 $\{x_n\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，则有 $l = \dfrac{-1}{2+l}$，解得 $l = -1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$。

（3）因 $x_1 < x_2$，若设 $x_{k-1} < x_k$，则 $4 + 3x_{k-1} < 4 + 3x_k$，即 $x_k < x_{k+1}$，故由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 递增，又因 $x_1 < 5$，若设 $x_k < 5$，则 $x_{k+1} = \sqrt{4+3x_k} < 5$，故由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界 5。

由单调有界定理知，数列$\{x_n\}$收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，则有$l=\sqrt{4+3l}$，解得$l=4$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$。

（4）因$0<x_1<1$，由数学归纳法易知$0<x_n<1$，即$\{x_n\}$有界；

又因为$x_{n+1}-x_n=\sqrt{1-x_n}(\sqrt{1-x_n}-1)<0$，知$\{x_n\}$递减。

故由单调有界定理知，数列$\{x_n\}$收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，则有$l=1-\sqrt{1-l}$，解得$l=1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$。

（5）因$0<x_1<1$，假设$0<x_n<1$，由$x_{n+1}=x_n(2-x_n)=1-(1-x_n)^2$知$0<x_{n+1}<1$，由数学归纳法可知$\{x_n\}$有界；又因为$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)>0$，所以$\{x_n\}$递增。

故由单调有界定理知，数列$\{x_n\}$收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，则有$l=l(2-l)$，解得$l=0,l=1$，将$l=0$舍去，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$。

例 7.12 利用单调有界定理证明数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$收敛。

证明 证法一（利用二项式展开）：

设$x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，则

$$x_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

注意到

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right),\ \left(1-\frac{2}{n}\right)<\left(1-\frac{2}{n+1}\right),\cdots,\quad \left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

且x_{n+1}比x_n多一项$\dfrac{1}{(n+1)!}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)>0,$所以$x_{n+1}>x_n$，即$x_n$递增。又

$$0<x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1+1+1-\frac{1}{n}<3$$

故x_n有上界。即数列$\{x_n\}$单调有界，故由单调有界定理知，数列$\{x_n\}$收敛。

证法二（利用 Bernoulli 不等式）：

注意到 Bernoulli 不等式$(1+x)^n\geqslant 1+nx,\ (x>-1$，$n$为正整数)，有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n\geqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

由 $-\frac{1}{(n+1)^2}>-1,$ 利用 Bernoulli 不等式，有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1$$

故 x_n 递增。

为证 $\{x_n\}$ 有上界，考虑数列 $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，可类似地证明 y_n 递减，事实上，

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}=\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$$

由 $\frac{1}{n^2+2n}>-1,$ 利用 Bernoulli 不等式，有

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}\geqslant\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1$$

故 y_n 递减显然有 $x_n<y_n$，故 $\forall n$，有 $x_n<y_n\leqslant\cdots\leqslant y_1=4$。即数列 $\{x_n\}$ 有上界 4。

证法三（仍利用均值不等式）：

由 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n个}\cdot 1<\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

得 $x_n<x_{n+1}$，即 x_n 递增，参阅上述各证法可证有上界。

证法四（构造不等式）：

$\forall 0\leqslant a<b$ 和正整数 n，有不等式 $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n$。事实上，

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}=\frac{(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n)}{b-a}=b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n<(n+1)b^n$$

该不等式又可变形为

$$b^n\left[(n+1)a-nb\right]<a^{n+1}\ (0\leqslant a<b,\quad n\text{ 为正整数})$$

在此不等式中，取 $a=1+\dfrac{1}{n+1}$，$b=1+\dfrac{1}{n}$，则有 $0\leqslant a<b$，就有 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$，故 x_n 递增；取 $a=1$，$b=1+\dfrac{1}{2n}$，则有

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}<1\Rightarrow\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<2\Rightarrow x_{2n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}<4$$

又由 $x_{2n-1}<x_{2n}\Rightarrow x_{2n-1}<4$ 得 $x_n<4$，即数列$\{x_n\}$有上界 4。

例 7.13 利用单调有界定理证明 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛。

证明 构造不等式 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$

则当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{2}<\ln 2<1$；

当 $n=2$ 时，$\dfrac{1}{3}<\ln\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{2}$；

当 $n=3$ 时，$\dfrac{1}{4}<\ln\dfrac{4}{3}<\dfrac{1}{3}$；

$\vdots$

一般地，有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{n}$。故有

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\\&=\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)>\ln n\end{aligned}$$

所以 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n>0$，即数列$\{a_n\}$有下界。又

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$$

故数列$\{a_n\}$递减。由数列收敛的单调有界原理知，数列$\{a_n\}$收敛。

例 7.14 利用单调有界定理证明下列各题：

（1）设当 $1\leqslant x<+\infty$ 时，$f'(x)$ 连续且 $0<f'(x)<\dfrac{1}{x^2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在；

（2）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续有界，且 $f(x+1)\neq f(x)$ 对所有 $x>0$ 成立，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(n)-f(n-1)]=0$。

（3）设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负递减，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，证明 $\{a_n\}$ 有极限 L 且 $0\leqslant L\leqslant f(1)$。

证明　（1）因 $f(x)$ 递增，所以

$$0<\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t<\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

即 $f(x)-f(1)<-\dfrac{1}{x}+1$；从而 $f(x)<f(1)-\dfrac{1}{x}+1<f(1)+1$，所以 $\{f(n)\}$ 递增有上界。

（2）令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$，依题意 $g(x)\neq 0$ 对所有 $x>0$ 成立，则 $g(x)$ 恒正或恒负。

若不然，设 $g(\alpha)>0, g(\beta)<0$。因为 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 连续，所以由零点定理知存在 ξ 介于 α 与 β 之间，使得 $g(\xi)=0$，这与题设矛盾。

不妨设 $g(x)>0, x\in(0,+\infty)$。所以有 $g(n)>0(n\in N)$，即 $f(n+1)>f(n)(n\in N)$。这说明数列 $\{f(n)\}$ 是单调递增的。又 $f(n)$ 有界，从而 $\lim\limits_{x\to\infty} f(n)=l$ 存在。

（对 $g(x)<0$ 情形，证明类似。）

所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(n)-f(n-1)\big)=\lim\limits_{x\to\infty} f(n)-\lim\limits_{x\to\infty} f(n-1)=l-l=0$，证毕。

（3）$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^x f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n} f(x)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)-\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k)(k+1-k)=f(n)>0$ 所以 a_n 有下界；又

$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x=f(n+1)-f(\xi), \xi\in(n,n+1)$$

由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负递减，所以 $f(n+1)-f(\xi)\leqslant 0$，从而 a_n 单调递减，因此 $\{a_n\}$ 收敛且 $a_1=f(1)\geqslant a_N>0$，两边令 $n\to\infty$，有 $0\leqslant L\leqslant f(1)$。

例 7.15　利用单调有界定理证明下列各题：

（1）设 $a_1,a_2>0$，$a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限；

（2）设 $|a_n|\leqslant M$，$a_{n+2}\leqslant\dfrac{2a_n+a_{n+1}}{3}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛；

（3）设 $b_1=0,b_2=1$，$b_{n+2}=b_n+b_{n+1}, a_n=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限；

（4）设 a_0，$a_0\neq k\pi$（$k\in Z$），$a_{n+1}=\sin a_n$ (n=0,1,2,⋯)，证明 $\{a_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{na_n^2}$.;

（5）设 $\alpha>0$，$x_1=\alpha^{\frac{1}{p}}$，$x_{n+1}=\dfrac{p-1}{p}x_n+\dfrac{\alpha}{p}x_n^{-p+1}$，$p$ 为整数，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha^{\frac{1}{p}}$。

证明　（1）不妨设 $a_1<a_2$，则 $a_1<a_3<a_5<\cdots$，$a_2>a_4>a_6>\cdots$，即 $\{a_{2n}\}$ 递减有下界 0，故由单调有界定理知，$\{a_{2n}\}$ 收敛，设 $a_{2n}\to a\ (n\to\infty)$。

又根据 $2a_{2n+2}=a_{2n+1}+a_{2n}$ 可得 $a_{2n+1}\to a\ (n\to\infty)$。

故 $\{a_n\}$ 收敛于 a。

又根据递推关系 $\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{2}=\cdots=\dfrac{a_1+2a_2}{2}$ 可得 $a=\dfrac{a_1+2a_2}{2}$。

（2）由已知关系式可得 $a_{n+2}+\dfrac{2}{3}a_{n+1}\leqslant a_{n+1}+\dfrac{2}{3}a_n$

令 $b_n=a_{n+1}+\dfrac{2}{3}a_n$，易证 $\{b_n\}$ 为递减有界数列，故由单调有界定理知，$\{b_n\}$ 收敛，设 $b_n\to\dfrac{5}{3}b\ (n\to\infty)$。

再令 $c_n=a_n-b$，则有 $c_{n+1}-\dfrac{2}{3}c_n\to 0\ (n\to\infty)$，易证得 $c_n\to 0\ (n\to\infty)$，即 $a_n\to b\ (n\to\infty)$。故 $\{a_n\}$ 收敛。

（3）易知 $b_3=1, b_4=2$，$\dfrac{5b_4}{3}\geqslant b_5\geqslant\dfrac{3b_4}{2}$，若假设 $\dfrac{5b_k}{3}\geqslant b_{k+1}\geqslant\dfrac{3b_k}{2}\ (k>4)$，则有

$$\frac{3b_{k+1}}{2}<\frac{8b_{k+1}}{5}=b_{k+1}+\frac{3b_{k+1}}{5}\leqslant b_{k+2}\leqslant b_{k+1}+\frac{2b_{k+1}}{3}\leqslant\frac{5b_{k+1}}{3}$$

由数学归纳法可知

$$\frac{3b_n}{2}\leqslant b_{n+1}\leqslant\frac{5b_n}{3}\quad (n\geqslant 4)$$

从而又得
$$b_{n+1}^2\leqslant\frac{5b_n}{3}\cdot\frac{2b_{n+2}}{3}<b_nb_{n+1}\quad (n\geqslant 4)$$

即 $\dfrac{b_n}{b_{n+1}}>\dfrac{b_{n+1}}{b_{n+2}}\geqslant\dfrac{3}{5}$。

故 $\left\{\dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right\}$ 为递减有界数列，即 $\{a_n\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{b_{n+1}}=l$，由等式 $1=\dfrac{b_{n+1}}{b_{n+2}}+\dfrac{b_n}{b_{n+2}}=\dfrac{b_{n+1}}{b_{n+2}}+\dfrac{b_n}{b_{n+1}}\cdot\dfrac{b_{n+1}}{b_{n+2}}$ 得 $1=l+l^2$，故 $l=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$。

（4）易证 a_n 单调递减且有界，故存在极限，不难得到

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-\sin^2 a_n}{a_n^2\sin^2 a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}a_n^4+o(a_n^4)}{a_n^2\sin^2 a_n}=\frac{1}{6}$$

（5）用数学归纳法可证 $x_n>\alpha^{\frac{1}{p}}$，$x_{n+1}-x_n<0$，由单调有界定理知收敛，两边取极限得证。

例 7.16 利用单调有界定理证明下列各题：

（1）设 $a_1>b_1>0,a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\ (n\geqslant 1)$，证明 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，且极限相等；

（2）设 $a_1>0,b_1>0,a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+b_n}{2}\ (n\geqslant 1)$，证明 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，且极限相等；

（3）设 $a_1>b_1>0,a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\ (n\geqslant 1)$，证明 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛于 $\sqrt{a_1b_1}$；

（4）设 $b_1>a_1>0,a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{b_n}\right)(n\geqslant 1)$，证明 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，且极限相等；

（5）设 $a_1>b_1>0,a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n},b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\ (n\geqslant 1)$，证明 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，且极限相等；

（6）设 $a_1>0,b_1>0,a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}}\ (n\geqslant 1)$，证明 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，且极限相等；

（7）设 $0<a_1<b_1<c_1,a_{n+1}=\dfrac{3}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}},b_{n+1}=\sqrt[3]{a_nb_nc_n},c_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n+c_n}{3}$，证明 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 都收敛，且极限相等。

证明　（1）由题设知　　$a_n>0,b_n>0$；

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\geqslant\sqrt{a_nb_n}=b_{n+1}\ ;$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\leqslant\frac{a_n+a_n}{2}=a_n\ ;$$

$$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\geqslant\sqrt{b_nb_n}=b_n$$

故 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant a_2\leqslant a_1$。即 $\{a_n\}$ 递减有下界 b_1，$\{b_n\}$ 递增有上界 a_1，故由单调有界定理知 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，在 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 两边取极限得 $a=\dfrac{a+b}{2}$，所以 $a=b$。

（2）易知 $b_{n+1}=\dfrac{a_n+3b_n}{4}$，由 $a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{a_n-b_n}{4}$ 可知，数列 $\{a_n-b_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1}{4}$ 的几何级数，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$。

若 $a_1\leqslant b_1$，则易知 $\{a_n\}$ 为递增数列，再由 $a_n\leqslant b_n\leqslant b_1$ 知 $\{a_n\}$ 有上界，从而由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛，从而 $\{b_n\}$ 也收敛，且收敛于同一极限值。

若$a_1 \geqslant b_1$，可类似推证。

（3）由 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\geqslant\sqrt{a_nb_n},b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\leqslant\dfrac{2a_nb_n}{2\sqrt{a_nb_n}}=\sqrt{a_nb_n}$

得$a_{n+1}\geqslant b_{n+1}$，故可得

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\leqslant\frac{a_n+a_n}{2}=a_n,b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\geqslant\frac{2a_nb_n}{a_n+a_n}=b_n$$

即得 $$a_1>a_2>\cdots>a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n>\cdots>b_2>b_1$$

即$\{a_n\}$递减有下界b_1，$\{b_n\}$递增有上界a_1；故由单调有界原理得$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都收敛。

由$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$知$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的极限相等，由

$$a_{n+1}b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\cdot\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=a_nb_n=\cdots=a_1b_1$$

知$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的极限均为$\sqrt{a_1b_1}$。

（4）由题设知，$a_1<a_2=\sqrt{a_1b_1}<b_1$，且有$\dfrac{1}{b_1}<\dfrac{1}{b_2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{b_1}\right)<\dfrac{1}{a_2}$，知$a_1<a_2<b_2<b_1$，由数学归纳法可证$a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}$，即$\{a_n\}$递增有上界$b_1$，$\{b_n\}$递减有下界$a_1$；故由单调有界原理得$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都收敛。

由$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$知$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的极限相等。

（5）由$2(a_n^2+b_n^2)\geqslant(a_n+b_n)^2$可知$a_n\geqslant b_n$，以及$a_{n+1}\leqslant\dfrac{a_n^2+a_nb_n}{a_n+b_n}=a_n$，从而知$\{a_n\}$为递减数列，$\{b_n\}$为递增数列；又因为$b_1<a_n$，$b_n<a_1$，故$\{a_n\}$有下界$b_1$，$\{b_n\}$有上界$a_1$；故由单调有界原理得$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都收敛。

由$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$知$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的极限相等。

（6）由题设知$a_n>0,b_n>0$，且有

$$b_{n+1}^2-a_{n+1}^2=\frac{(a_n-b_n)^2}{4}\geqslant0$$

故得$b_{n+1}\geqslant a_{n+1}$，从而有$a_{n+1}\geqslant a_n,b_{n+1}\leqslant b_n$，故由单调有界原理得$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都收敛。

由$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$知$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的极限相等。

（7）由调和平均、几何平均、算术平均的关系知，对任意正整数n有$0<a_n<b_n<c_n$，又

$$a_{n+1}=\frac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}}>\frac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n}}=a_n,\quad c_{n+1}=\frac{a_n+b_n+c_n}{3}<\frac{c_n+c_n+c_n}{3}=c_n$$

知$\{a_n\}$递增有上界c_1，$\{c_n\}$递减有下界a_1，故由单调有界原理得$\{a_n\}$、$\{c_n\}$都收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$，则$0<a_1<a\leqslant c<c_1$，由$c_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n+c_n}{3}$得$b_n=3c_{n+1}-a_n-c_n$，于是$\{b_n\}$也收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则有$b=2c-a$，再由$b_{n+1}=\sqrt[3]{a_nb_nc_n}$得$b^3=abc$，即$b^2=ac=a\cdot\dfrac{a+b}{2}$，整理得$(a+2b)(a-b)=0$，因$a+2b>0$，所以$a=b$，$c=\dfrac{a+b}{2}=a$，得证。

例 7.17　利用单调有界定理解决下列问题：

（1）设数列$x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{6(1+x_n)}{7+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（2）设$a>0$，$a_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n(a_n^2+3a)}{3a_n^2+a}$，证明$\{a_n\}$收敛并求其极限；

（3）设$\alpha>1,x_1>\sqrt{\alpha},\ x_{n+1}=\dfrac{\alpha+x_n}{1+x_n}\ (n\geqslant1)$，证明数列$\{x_n\}$收敛并求其极限；

（4）设$x_1>0,\ x_{n+1}=\dfrac{a(1+x_n)}{a+x_n}\ (n\geqslant1)$，$a>1$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求极限；

（5）设$x_1=1,x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}\ (n=2,3,\cdots)$，证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限；

（6）设$x_1=1,x_2=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}\ (n=2,3,\cdots)$，证明$\left\{x_n\right\}$收敛并求其极限；

（7）设$\{a_n\}$为 Fibonacci 序列，即$a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，记$x_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，证明$\left\{x_n\right\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（8）设数列$\{p_n\},\{q_n\}$满足条件$p_1=q_1=1$，$p_{n+1}=p_n+2q_n$，$q_{n+1}=p_n+q_n$，记$x_n=\dfrac{p_n}{q_n}$，证明$\left\{x_n\right\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（9）设$2a_{n+1}=1+b_n^2$，$2b_{n+1}=2a_n-a_n^2$，$0\leqslant b_n\leqslant\dfrac{1}{2}\leqslant a_n$，证明$\{a_n\}$、$\{b_n\}$收敛，并求极限。

证明　（1）先证有界性。

显然$x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，所以$0<x_{n+1}=\dfrac{6(1+x_n)}{7+x_n}<\dfrac{6(1+x_n)}{1+x_n}=6$。即数列$\{x_n\}$有上界也有下界。

再证单调性。

因为
$$x_2-x_1=\frac{6(1+x_1)}{7+x_1}-x_1=\frac{6-x_1-x_1{}^2}{7+x_1}=\frac{\frac{25}{4}-\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2}{7+x_1}$$

所以 x_2-x_1 的符号取决于上式分子的符号。

当 $x_1+\frac{1}{2}<\frac{5}{2}$ 时，即 $x_1<2$ 时， $x_2>x_1$，当 $x_1+\frac{1}{2}>\frac{5}{2}$ 时，即 $x_1>2$ 时， $x_2<x_1$。

① 若 $0<x_1<2$ 时， $x_2>x_1$，假设 $x_k>x_{k-1}$，则

$$x_k-x_{k-1}=\frac{6(1+x_k)}{7+x_k}-\frac{6(1+x_{k-1})}{7+x_{k-1}}=\frac{6(x_k-x_{k-1})}{(7+x_k)(7+x_{k-1})}>0$$

故由数学归纳法知数列 $\{x_n\}$ 单增，又 $\{x_n\}$ 有上界。所以由单调有界原理得数列 $\{x_n\}$ 收敛。

② 若 $x_1>2$ 时， $x_2<x_1$，假设 $x_k<x_{k-1}$，则

$$x_k-x_{k-1}=\frac{6(1+x_k)}{7+x_k}-\frac{6(1+x_{k-1})}{7+x_{k-1}}=\frac{6(x_k-x_{k-1})}{(7+x_k)(7+x_{k-1})}<0$$

故由数学归纳法知数列 $\{x_n\}$ 单减，又 $\{x_n\}$ 有下界。所以由单调有界原理得数列 $\{x_n\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在 $x_{n+1}=\frac{6(1+x_n)}{7+x_n}$ 两边取极限得 $l=\frac{6(1+l)}{7+l}$。即得 $l=2,l=-3$（舍去）。所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ =2。

（2）若 $a_1^2<a$，可知 $a_n^2<a$， $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$，即 $\{a_n\}$ 递增有上界 $\sqrt{a}$；若 $a_1^2\geqslant a$，可知 $a_n^2\geqslant a$， $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1$，即 $\{a_n\}$ 递减有下界 $\sqrt{a}$。

故由单调有界原理得 $\{a_n\}$ 收敛，且可求得极限为 $\sqrt{a}$。

（3）可证 $\{x_{2n}\}$ 递增有上界 $\sqrt{\alpha}$， $\{x_{2n+1}\}$ 递减有下界 $\sqrt{\alpha}$，极限为 $\sqrt{\alpha}$。

（4）当 $0<x_1<\sqrt{a}$ 时 $\{x_n\}$ 递增有上界 $\sqrt{a}$，当 $x_1>\sqrt{a}$ 时 $\{x_n\}$ 递减有下界 0。

（5）由已知得 $x_{n+2}=2-\frac{1}{x_n+1}$，所以 $x_{n+2}-x_n=\frac{x_n-x_{n-2}}{(x_n+1)(x_{n-2}+1)}$，由 $x_3>x_1$ 可证 $\{x_{2k+1}\}$ 递增，由 $x_4<x_2$ 可证 $\{x_{2k}\}$ 递减，又 $1\leqslant x_n<2$，故极限为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。

（6）因

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}}-x_n=\frac{1-x_n-x_n^2}{2+x_n}=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x_n\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x_n\right)}{2+x_n} \quad ①$$

$$x_{n+2}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}}=\frac{1+x_n}{2+x_n}=1-\frac{1}{2+x_n}$$

而 $x_1=1>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，从而 $x_3=1-\frac{1}{2+x_1}>1-\frac{1}{2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，由数学归纳法可

得 $x_{2n-1} > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，又由式①可知 $x_{2n+1} - x_{2n-1} < 0$，故 $\{x_{2n-1}\}$ 递减有下界。

又 $0 < x_2 = \dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，从而 $x_4 = 1 - \dfrac{1}{2+x_2} < 1 - \dfrac{1}{2+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，由数学归纳法可得 $x_{2n} < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，又由式①可知 $x_{2n+2} - x_{2n} > 0$，故 $\{x_{2n}\}$ 递增有上界。

故由单调有界定理知 $\{x_n\}$ 收敛，易求得极限为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

（7）由已知可得 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，即 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$；令 $y_n = \dfrac{1}{x_n}$，则 $y_{n+1} = \dfrac{1}{1+y_n}$ 且 $y_1 = 1$，此题转化为上题，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$。

（8）易知 $x_n = 1 + \dfrac{1}{x_n + 1}$，且 $1 \leqslant x_n < 2$ 已知 $x_1 < x_3$，若假设 $x_{2k-1} < x_{2k+1}$，则由数学归纳法，有

$$x_{2k+3} - x_{2k+1} = \frac{1}{x_{2k+2}+1} - \frac{1}{x_{2k}+1} = \frac{1}{2+\dfrac{1}{x_{2k+1}+1}} - \frac{1}{2+\dfrac{1}{x_{2k-1}+1}} > 0$$

即 $\{x_{2k-1}\}$ 递增有界，故由单调有界定理知 $\{x_{2k-1}\}$ 收敛，

同理可证，$\{x_{2k}\}$ 递减有界，也收敛，再由递推关系知，$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$。

（9）由 $0 \leqslant b_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ 及 $2a_{n+1} = 1 + b_n^2$，可知 $\{a_n\}$ 有界。

下面先证明 $\{a_{2k}\}$ 与 $\{b_{2k-1}\}$ 都收敛。

当 $b_1 = \sqrt{2}-1$ 时，有 $b_{2k-1} = \sqrt{2}-1$，$a_{2k} = 2-\sqrt{2}$，所以 $\{a_{2k}\}$ 与 $\{b_{2k-1}\}$ 分别收敛于 $2-\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}-1$。

当 $0 \leqslant b_1 < \sqrt{2}-1$ 时，有 $a_2 < 2-\sqrt{2}$ 且 $2b_3 = 1-(1-a_2)^2 < 2(\sqrt{2}-1)$，得 $b_3 < \sqrt{2}-1$。由于

$$\begin{aligned}2b_3 - 2b_1 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}b_1^2 - \frac{1}{4}b_1^4 - 2b_1 = \frac{1}{2}(2-b_1)^2 - \frac{1}{4}b_1^4 - \frac{5}{4}\\ &> \frac{1}{2}(3-\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)^4 - \frac{5}{4} = 0\end{aligned}$$

可知 $b_3 > b_1$，利用下述关系式

$$2a_{2k+2} - 2a_{2k} = b_{2k+1}^2 - b_{2k-1}^2 > 0,$$

$$2b_{2k+3} - 2b_{2k+1} = (1-a_{2k})^2 - (1-a_{2k+2})^2 > 0$$

可得 $\{a_{2k}\}$ 与 $\{b_{2k-1}\}$ 同序递增且有界，故收敛。

设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}=a$， $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k-1}=b$，则对递推公式取极限，得 $\begin{cases}2a=1+b^2\\2a-a^2=2b\end{cases}$，于是 $a^2=(1-b)^2$，将 $a=1-b$ 代入上述第一式，有 $b^2+2b-1=0$，解得 $b=-1\pm\sqrt{2}$，舍去负值，取 $b=\sqrt{2}-1$，故 $a=2-\sqrt{2}$，即 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}=2-\sqrt{2}$， $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k-1}=\sqrt{2}-1$。

当 $\sqrt{2}-1<b_1\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，同理可证 $\{a_{2k}\}$ 与 $\{b_{2k-1}\}$ 同序递减且有界，分别收敛于 $2-\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}-1$。

下面再证明 $\{a_{2k-1}\}$ 与 $\{b_{2k}\}$ 也收敛于 $2-\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}-1$。

当 $a_1=2-\sqrt{2}$ 时，可知 $a_{2k-1}=2-\sqrt{2}$， $b_{2k}=\sqrt{2}-1$，此时结论可证。

当 $\dfrac{1}{2}\leqslant a_1<2-\sqrt{2}$ 时，有 $2b_2=1-(1-a_1)^2<2(\sqrt{2}-1)$，即 $b_2<\sqrt{2}-1$；进而推知 $a_3<2-\sqrt{2}$；而

$$\begin{aligned}2a_3-2a_1&=1+b_2^2-2a_1=1+\left(a_1-\frac{1}{2}a_1^2\right)^2-2a_1=(1-a_1)^2-a_1^3+\frac{1}{4}a_1^4\\&>\left[(\sqrt{2}-1)^2-(2-\sqrt{2})^2+\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})^4\right]\\&\quad+(2-\sqrt{2})^3-a_1^3-\frac{1}{4}[(2-\sqrt{2})^4-a_1^4]\\&=(2-\sqrt{2})^3-a_1^3-\frac{1}{4}[(2-\sqrt{2})^4-a_1^4]\\&=\frac{2-\sqrt{2}-a_1}{4}\Big\{\left[4(2-\sqrt{2})^2+4(2-\sqrt{2})a_1+4a_1^2\right]-\\&\quad\left[(2-\sqrt{2})^3+(2-\sqrt{2})^2a_1+(2-\sqrt{2})a_1^2+a_1^3\right]\Big\}\\&=\frac{2-\sqrt{2}-a_1}{4}\left\{(2+\sqrt{2})\left[(2-\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})a_1+a_1^2\right]-a_1^3\right\}\\&>\frac{2-\sqrt{2}-a_1}{4}\left\{(2+\sqrt{2})a_1^2-a_1^3\right\}>0\end{aligned}$$

所以 $a_3>a_1$，再应用关系式

$$2b_{2k+2}-2b_{2k}=(1-a_{2k-1})^2-(1-a_{2k+1})^2>0,$$

$$2a_{2k+3}-2a_{2k+1}=b_{2k+2}^2-b_{2k}^2>0$$

可得 $\{a_{2k-1}\}$ 与 $\{b_{2k}\}$ 同序递增且有界，也收敛于 $2-\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}-1$。

当 $2-\sqrt{2}<a_1\leqslant 1$ 时，同理可证 $\{a_{2k-1}\}$ 与 $\{b_{2k}\}$ 递减，收敛于 $2-\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}-1$。

当 $1<a_1\leqslant 2$ 时，由于 $b_2=1-(1-a_1)^2$ 知 $0\leqslant b_2<1$，显然 $a_1>a_3$，结论可证。

综上可知， $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2-\sqrt{2}$， $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\sqrt{2}-1$。

2．利用单调有界定理证明某个点（数）具有某种性质

单调有界定理的作用是确定一个数（单调有界数列的极限），在证明问题中需要找到一个具有性质 P 的数。它的基本步骤是设想所求数是某一单调上升或下降且有界数列的极限，根据性质 P 构造一个单调有界数列，使其极限是问题中需要找具有性质 P 的数，其次再证明此数合乎问题的需要。

例 7.18　利用单调有界定理证明聚点定理，即证有界无穷点集必有聚点。

分析　设 S 是直线上的有界无限点集，因要证的点为 S 的聚点 ξ，聚点就是所求的“具有性质 P 的数”，即在 ξ 的任意邻域中含有 S 的无穷多个点。因 S 是为有界点集，所以存在由上下界组成的闭区间 $[-M,M]$ 含有 S 的无穷多个点，通过二分法，可构造一个闭区间套，使该闭区间套的每一个都含有 S 的无穷多个点，从而构造出以此闭区间套的左（右）端点所组成的数列为单调有界数列，故由单调有界定理知必有极限，再证此极限点为 S 的聚点，即证在 ξ 的任意邻域中含有 S 的无穷多个点。

证明　设 S 是直线上的有界无限点集，所以 $\exists M>0$，对任意的 $x\in S$ 都有 $-M\leqslant x\leqslant M$。

令 $[a_1,b_1]=[-M,M]$，则 $[a_1,b_1]$ 含有 S 的无穷多个点。

将 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个小区间，则其中至少有一个闭区间含有 S 的无穷多个点，记这样的小闭区间为 $[a_2,b_2]$，这样无限进行下去，得一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，此闭区间套的左端点所组成的数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界 b_1，故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 必有极限，设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，由闭区间套的做法知 $\xi\in[a_n,b_n]$。

下面证明 ξ 是 S 的聚点。

$\forall\varepsilon>0$，因 $b_n-a_n=\dfrac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\to 0(n\to\infty)$，所以 $\exists N>0$ 使 $[a_N,b_N]\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$，由 $[a_N,b_N]$ 中含有 S 的无穷多个点知 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ 中含有 S 的无穷多个点，所以 ξ 是 S 的聚点。

例 7.19　利用单调有界定理证明致密性定理，即证有界数列必有收敛子列。

分析　因数列是有界数列，我们通过抽子列的办法，构造它的一个单调子数列，再根据单调有界定理得到该子列收敛。

证明　设数列 $\{x_n\}$ 是有界数列，首先证明 $\{x_n\}$ 中存在单调子数列：

（1）若 $\{x_n\}$ 中存在单调递增子数列 $\{x_{n_k}\}$，则得证；

（2）若 $\{x_n\}$ 中无单调递增子数列，那么 $\exists n_1$，当 $n>n_1$ 时恒有 $x_{n_1}>x_n$；同样在 $\{x_n\}$（$n>n_1$）中也无单调递增子数列，于是又 $\exists n_2$，当 $n_2>n$ 时恒有 $x_{n_2}<x_n<x_{n_1}$；如此无限进行下去便可得到一严格递减子数列 $\{x_{n_k}\}$。

由上可知，$\{x_n\}$ 中存在单调子数列 $\{x_{n_k}\}$，而 $\{x_n\}$ 有界，所以 $\{x_{n_k}\}$ 有界。

故由单调有界定理知，$\{x_{n_k}\}$ 必收敛，即有界数列 $\{x_n\}$ 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$。

3．利用单调有界定理证明数列或函数的性质

例 7.20 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内递增有界，证明：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在。

证明 只证 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在。

在 (a,b) 内任取一趋于 b 的递增数列 $\{b_n\}$，由已知得 $\{f(b_n)\}$ 递增有上界，故有极限，设 $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = A$。即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 有 $A-\varepsilon < f(b_n) < A+\varepsilon$。

取 $\delta = b - b_N > 0$，则当 $-\delta < x - b < 0$ 即 $b_N < x < b$ 时，在 x,b 之间必有 $b_N < x \leqslant b_m < b$，由递增得 $A-\varepsilon < f(b_N) < f(x) \leqslant f(b_m) < A+\varepsilon$。

所以 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$。

例 7.21 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 的自身映射且 $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|$，任取 $x_1 \in [a,b]$，令 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$，证明数列 $\{x_n\}$ 有极限，且极限为 $f(x)$ 的不动点。

证明 由已知得 $f(x)$ 连续，$x_n \in [a,b]$，即 $\{x_n\}$ 有界。下面证明 $\{x_n\}$ 单调。

若 $x_1 \leqslant f(x_1)$，则 $x_2 = \dfrac{1}{2}[x_1 + f(x_1)] \geqslant x_1$，假设 $x_{n-1} \leqslant x_n$，由

$$f(x_{n-1}) - f(x_n) \leqslant |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leqslant |x_{n-1} - x_n| = x_n - x_{n-1}$$

移项得
$$x_{n-1} + f(x_{n-1}) \leqslant x_n + f(x_n)$$
从而 $x_n \leqslant x_{n+1}$，故数学归纳法知 $\{x_n\}$ 递增。

若 $x_1 \geqslant f(x_1)$，同理可证 $\{x_n\}$ 递减；故由单调有界定理知 $\{x_n\}$ 收敛，两边取极限得证。

例 7.22 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内递增，则 $\forall x_0 \in (a,b)$，$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，且 $f(x_0-0) = \sup\limits_{x\in \mathring{U}_-(x_0)} \{f(x)\}$，$f(x_0+0) = \inf\limits_{x\in \mathring{U}_-(x_0)}\{f(x)\}$；$f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0)$。

证明 只证 $f(x_0-0)$ 存在且 $f(x_0-0) = \sup\limits_{x\in \mathring{U}_-(x_0)} \{f(x)\}$，$f(x_0-0) \leqslant f(x_0)$。

在 (a,x_0) 内任取一趋于 x_0 的递增数列 $\{x_n\}$，由已知得 $\{f(x_n)\}$ 递增有上界 $f(x_0)$，故 $\{f(x_n)\}$ 收敛，由归结原则知 $f(x_0-0)$ 存在。

设 $f(x_0-0) = A,\ \sup\limits_{x\in \mathring{U}_-(x_0)} \{f(x)\} = B$。

由上确界的定义知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x' \in \mathring{U}_-(x_0)$ 使 $f(x') > A - \varepsilon$；取 $\delta = x_0 - x' > 0$，则当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时必有 $x' < x$；从而 $A-\varepsilon < f(x') \leqslant f(x)$，又对 $\forall x \in \mathring{U}_-(x_0)$，有 $f(x) \leqslant A < A+\varepsilon$；故 $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$；即 $f(x_0-0) = \sup\limits_{x\in \mathring{U}_-(x_0)} \{f(x)\}$。

又因 $x_n < x_0$，所以 $f(x_n) \leqslant f(x_0)$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant f(x_0)$，故 $f(x_0-0) \leqslant f(x_0)$。

7.5.3 柯西收敛准则的应用

1．利用柯西收敛准则证明数列收敛

例 7.23 利用柯西收敛准则证明下列各题：

（1）设 $a_n=1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^3}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛；

（2）设 $a_n=\dfrac{\sin 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\sin 2}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{\sin n}{n(n+1)}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛；

（3）设 $a_n=\dfrac{\cos 1!}{1!}+\dfrac{\cos 2!}{2!}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n!}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛；

（4）设 $|a_{n+2}-a_{n+1}|<\dfrac{1}{2}|a_{n+1}-a_n|$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛；

（5）若存在常数 $M>0$，$\forall\ n$，有 $A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\leqslant M$，则称 $\{a_n\}$ 有有界变差，证明数列 $\{A_n\}$ 收敛，数列 $\{a_n\}$ 也收敛；

（6）设 $p_{n+1}=p_n+2q_n,q_{n+1}=p_n+q_n,p_1=q_1=1$，则数列 $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$ 收敛，并求极限；

（7）方程 $x=m+\varepsilon\sin x\,(0<\varepsilon<1)$ 称为开普勒方程；设 $x_0=m$，$x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\cdots$，$x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛；

（8）设 $a>0,b>0$，$a_1=a$，$a_2=b$，$a_{n+2}=2+\dfrac{1}{a_{n+1}^2}+\dfrac{1}{a_n^2}$（$n=1,2,3,\cdots$），证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

证明 （1）对任意自然数 p，解不等式

$$
\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n|&=\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^3}\\
&\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\
&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\
&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon
\end{aligned}
$$

得 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对任意自然数 p，有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$，故由柯西收敛准则知数列 $\{a_n\}$ 收敛。

（2）对任意自然数 m,n，不妨设 $m>n$。解不等式

$$|a_m-a_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{\sin m}{m(m+1)}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right|+\left|\frac{\sin(n+2)}{(n+2)(n+3)}\right|+\cdots+\left|\frac{\sin m}{m(m+1)}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{m(m+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对任意自然数 m,n，有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$，故由柯西收敛准则知数列 $\{a_n\}$ 收敛。

（3）对任意自然数 m,n，不妨设 $m>n$，解不等式

$$|a_m-a_n|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)!}+\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)!}+\cdots+\frac{\cos m!}{m!}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)!}\right|+\left|\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)!}\right|+\cdots+\left|\frac{\cos m!}{m!}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{m!}$$

$$\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对任意自然数 m,n，有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$，故由柯西收敛准则知数列 $\{a_n\}$ 收敛。

（4）由于

$$\left|a_{n+2}-a_{n+1}\right|<\frac{1}{2}\left|a_{n+1}-a_n\right|<\left(\frac{1}{2}\right)^2\left|a_n-a_{n-1}\right|<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|a_2-a_1\right|$$

由此可知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\left|a_{n+1}-a_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}$。

另一方面，当 $n>N$ 时，对任意自然数 p，有

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|\leqslant\left|a_{n+p}-a_{n+p-1}\right|+\left|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|$$

$$<\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\left|a_{n+1}-a_n\right|+\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2}\left|a_{n+1}-a_n\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|$$

$$=\left|a_{n+1}-a_n\right|\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right]<2\left|a_{n+1}-a_n\right|<\varepsilon$$

故由柯西收敛准则知数列$\{a_n\}$收敛。

（5）易知$\{A_n\}$递增有上界，即收敛。应用柯西收敛准则可得证。

（6）设$a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$，则

$$a_{n+1}=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_n+2q_n}{p_n+q_n}=1+\frac{q_n}{p_n+q_n}=1+\frac{1}{1+a_n}>1$$

易推出$|a_{n+1}-a_n|<\dfrac{1}{4}|a_n-a_{n-1}|$，与上题类似可得证。

（7）易推出$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon|x_n-x_{n-1}|<\cdots<\varepsilon^n|x_1-x_0|$，故由柯西准则可证。

（8）由于$n\geqslant 3$时$a_n>2$，故$n\geq 5$时$a_n<\dfrac{5}{2}$。

$$\left|a_{n+1}-a_n\right|=\left|\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{a_{n-1}^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}-\frac{1}{a_{n-2}^2}\right|=\frac{a_n+a_{n-2}}{(a_na_{n-2})^2}\left|a_n-a_{n-2}\right|$$

$$\leqslant\frac{5}{16}\left(\left|a_n-a_{n-1}\right|+\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|\right)$$

$$\leqslant\frac{5}{8}\max\left(\left|a_n-a_{n-1}\right|,\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|\right)\leqslant\ldots\leqslant\left(\frac{5}{8}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}B(n\geqslant 9)$$

其中正常数B或者是$\left|a_6-a_5\right|$，或者是$\left|a_7-a_6\right|$。由此又得

$$|a_{n+p}-a_{n+1}|\leqslant|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}|$$

$$\leqslant\left[\left(\frac{5}{8}\right)^{\left[\frac{n+p-7}{2}\right]}+\cdots+\left(\frac{5}{8}\right)^{\left[\frac{n-5}{2}\right]}\right]B<\frac{B}{1-\frac{5}{8}}\left(\frac{5}{8}\right)^{\left[\frac{n-5}{2}\right]}\to 0(n\to\infty)$$

所以根据柯西准则，$\{a_n\}$为收敛数列。

例 7.24　设$f(x)$在区间$I=[a-r,a+r]$上可微，$|f'(x)|\leqslant\alpha<1$，$|f(a)-a|\leqslant(1-\alpha)r$，$\forall x_0\in I$，令$x_1=f(x_0)$，$x_n=f(x_{n-1})$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$，$x^*$为$f(x)$的不动点。

证明　先证对一切$x_n\in I$，因$x_0\in I$，假设$x_n\in I$，则

$$|x_{n+1}-a|=|f(x_n)-f(a)+f(a)-a|\leqslant|f'(\xi)||x_n-a|+|f(a)-a|\leqslant\alpha r+(1-\alpha)r=r$$

故由数学归纳法知一切$x_n\in I$。

再证$\{x_n\}$有极限，且极限为$f(x)$的不动点。

因$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)||x_n-x_{n-1}|\leq\alpha|x_n-x_{n-1}|$ $(0<\alpha<1)$

这表明$x_n=f(x_{n+1})$为压缩映象，由柯西准则可证$\{x_n\}$有极限。

又因$f(x)$连续，在$x_n=f(x_{n-1})$两边取极限可得极限为$f(x)$的不动点。

2．利用柯西收敛准则证明数列发散

例 7.25 利用柯西准则证明下列各题：

（1）数列 $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$ 发散；

（2）数列 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 发散；

（3）狄利克雷函数处处无极限；

（4）$f(x)=\sin\frac{1}{x}$，在 $x\to 0$ 时极限不存在。

证明 （1）取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall N$，取 $m_0=4N+1>N,n_0=4N>N$，有

$$|a_{m_0}-a_{n_0}|=\left|\sin\frac{(4N+1)\pi}{2}-\sin\frac{4N\pi}{2}\right|=1>\varepsilon_0$$

故由柯西准则知数列 $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$ 发散。

（2）取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall N$，取 $m_0=N+1>N,n_0=2(N+1)>N$，有

$$\left|a_{n_0}-a_{m_0}\right|=\frac{1}{m_0+1}+\frac{1}{m_0+2}+\cdots+\frac{1}{n_0}$$

$$>\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0}+\cdots+\frac{1}{n_0}=\frac{n_0-m_0}{n_0}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

故由柯西准则知数列 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 发散。

（3）取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall\delta>0$，取 $x'=x_0+\frac{\delta}{k_1}$（其中 k_1 为大于 1 的常数且使 $x'=x_0+\frac{\delta}{k_1}$ 为有理数）；$x''=x_0+\frac{\delta}{k_2}$（其中 k_2 为大于 1 的常数且使 $x'=x_0+\frac{\delta}{k_2}$ 为无理数）；显然有 $0<|x'-x_0|<\delta$ 和 $0<|x''-x_0|<\delta$ 使 $|D(x')-D(x'')|=\left|1-0\right|=1>\varepsilon_0$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在。

（4）取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall\delta>0$，取 $x'=\frac{1}{2n\pi}$，$x''=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，只要当 $n>\frac{1}{2\pi\delta}$，就有 $0<|x'-x_0|<\delta$ 和 $0<|x''-x_0|<\delta$ 使

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|=1>\varepsilon_0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在。

3．利用柯西收敛准则证明某个点（数）具有某种性质

柯西收敛准则的作用是确定一个数（柯西数列的极限），在证明问题中需要找到

一个具有性质 P 的数。它的基本步骤是设想所求数是某一数列的极限，根据性质 P 构造一个数列，证明此数列为柯西数列，从而得到其极限就是问题中需要找的具有性质 P 的数，其次再证明此数合乎问题的需要。

例 7.26 利用柯西收敛准则证明聚点定理，即证有界无穷点集必有聚点。

分析 设 S 是直线上的有界无限点集，因要证的点为 S 的聚点 ξ，聚点就是所求的“具有性质 P 的数”，即在 ξ 的任意邻域中含有 S 的无穷多个点。因 S 是为有界点集，所以存在由上下界组成的闭区间 $[-M,M]$ 含有 S 的无穷多个点，通过二分法，可构造一个闭区间套，使该闭区间套的每一个都含有 S 的无穷多个点，从每个闭区间中选取一点构造出一个数列，证明此数列为柯西数列，再证此柯西数列的极限点为 S 的聚点，即证在 ξ 的任意邻域中含有 S 的无穷多个点。

证明 设 S 是直线上的有界无限点集，所以 $\exists M>0$，对任意的 $x\in S$ 都有 $-M\leqslant x\leqslant M$。

令 $[a_1,b_1]=[-M,M]$，则 $[a_1,b_1]$ 含有 S 的无穷多个点。

将 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个小区间，则其中至少有一个闭区间含有 S 的无穷多个点，记这样的小闭区间为 $[a_2,b_2]$，这样无限进行下去，得一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，每一个闭区间 $[a_n,b_n]$ 中都含有 S 的无穷多个点。因此，存在 $x_1\in S$ 使 $x_1\in[a_1,b_1]$，存在 $x_2\in S$ 使 $x_2\in[a_2,b_2]$ 且 $x_2\neq x_1$，…，一般地，存在 $x_n\in S$ 使 $x_n\in[a_n,b_n]$ 且 $x_n\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$。

下面证明数列 $\{x_n\}$ 满足柯西收敛准则。

$\forall 0<\varepsilon<1$，取 $N=\dfrac{\ln\frac{M}{\varepsilon}}{\ln 2}$，当 $m,n>N$ 时，有 $x_m,x_n\in[a_{N+1},b_{N+1}]$，$|x_m-x_n|\leqslant b_{N+1}-a_{N+1}=\dfrac{M}{2^N}=\varepsilon$，故由柯西收敛准则知，数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

再证 ξ 为 S 的聚点。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ 得，$\forall\varepsilon>0,\exists N_1$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-\xi|<\varepsilon$，即 $\xi-\varepsilon<x_n<\xi+\varepsilon$，这说明在 ξ 的 ε 邻域 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无限多个点，所以 ξ 为 $\{x_n\}$ 的聚点，又 $\{x_n\}\subset S$，所以 ξ 也为 S 的聚点。

例 7.27（利用柯西收敛准则证明区间套定理）：

若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，即设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 具有如下性质：

（i） $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots$；

（ii） $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则在实数系中存在唯一的一点 ξ，使得 $\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

分析 从所给的闭区间套的每个闭区间中选取一点构造出一个数列，证明此数列为柯西数列，再证此柯西数列的极限点属于所有的闭区间。

证明 任取 $x_n\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$，则数列 $\{x_n\}$ 为柯西数列。

事实上，$\forall\varepsilon>0$，由区间套的构造，$\exists N$，当$m,n>N$时，x_m,x_n都属于$[a_n,b_n]$且$|x_m-x_n|\leqslant|b_n-a_n|<\varepsilon$，所以$\{x_n\}$为柯西数列，由柯西收敛准则知$\{x_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。

在$|x_m-x_n|\leqslant|b_n-a_n|$中令$m\to\infty$得$|x_n-x_0|\leqslant|b_n-a_n|$，$n=1,2,\cdots$，所以$x_0\in[a_n,b_n]\ (n=1,2,\cdots)$。

7.5.4 区间套定理的应用

1．利用区间套定理证明某个点（数）具有某种性质

应用闭区间套定理证明问题的关键是恰当构造一个满足一定条件的闭区间套，要把所证命题的本质属性保留在闭区间套的每一个闭区间中，然后由区间套套出一个公共点，这个点往往就是问题所要求的点，其主要特点是把整体性质收缩到某一点的任意邻域，达到“化整为零”的效果。

此类问题一般是证明存在某一个点具有性质 P。

证明步骤：

第一步，构造第一个闭区间$[a_1,b_1]$具有性质 P^*（性质 P^*根据性质 P 来选定）；

第二步，常用二等分法，做出满足闭区间定理条件的闭区间序列$\{[a_n,b_n]\}$（$n=1,2,\cdots$），使每一个$[a_n,b_n]$都具有性质 P^*；

第三步，根据闭区间定理得出唯一的一个点$\xi\in[a_n,b_n]$（$n=1,2,\cdots$），且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$；

第四步，利用上式和每个$[a_n,b_n]$都具有的性质 P^*，证明点ξ具有性质 P。

例 7.28（利用区间套定理证明确界存在定理）：

非空有上（下）界的数集，必有上（下）确界。

证明 只证非空有上界的情况。

设数集S非空有上界，即存在$a\in S$，不妨设数a不是S的上界，存在数b是S的上界。

将区间$[a,b]$二等分，若中点$\dfrac{a+b}{2}$是S的上界，则取$a_1=a,b_1=\dfrac{a+b}{2}$；若中点$\dfrac{a+b}{2}$不是S的上界，则取$a_1=\dfrac{a+b}{2},b_1=b$；得小区间$[a_1,b_1]$。

如此无限继续下去，得一区间套$[a_n,b_n]$，其中a_n不是S的上界、b_n是S的上界，且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$。

故由区间套定理知，存在唯一的一点ξ，使得$\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

对任意的$x\in S$，因b_n是S的上界，所以有$x\leqslant b_n$，令$n\to\infty$得$x\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，

所以 ξ 为 S 的上界。

而 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$ 知，存在 N，当 $n>N$ 时有 $\xi-\varepsilon<a_n$，即 $\xi-\varepsilon<a_{N+1}$，又对所有的 $a_n\in S$，即存在 S 中的某个数 a_{N+1}，使得 $\xi-\varepsilon<a_{N+1}$，故 ξ 为 S 的最小上界。

所以 $\xi=\sup S$。

例 7.29（利用区间套定理证明聚点定理）：

实轴上的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点。

证明　因 S 为有界点集，故存在 $M>0$, 使得 $S\subset[-M,M]$，记 $[a_1,b_1]=[-M,M]$。

现将 $[a_1,b_1]$ 等分为两个子区间。因 S 为无限点集，故两个区间中至少有一个含有 S 中无穷多个点，记此子区间为 $[a_2,b_2]$，则 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]$，且 $b_2-a_2=\dfrac{1}{2}(b_1-a_1)=M$。

再将 $[a_2,b_2]$ 等分为两个子区间，则其中至少有一个子区间含有 S 中无穷多个点，取出这样的一个子区间，记为 $[a_3,b_3]$，则 $[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]$，且 $b_3-a_3=\dfrac{1}{2}(b_2-a_2)=\dfrac{M}{2}$。

将此等分子区间的手续无限地进行下去，得到一个区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，它满足

（i）$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots$;

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2M}{2^{n-1}}=0$；

（iii）每一个 $[a_n,b_n]$ 都含有 S 中无穷多个点，

由区间套定理，存在唯一一点 $\xi\in[a_n,b_n]\subset[a,b]\,(n=1,2,\cdots)$，由区间套定理的推论，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)$。

从而 $U(\xi,\varepsilon)$ 内含有 S 中无穷多个点，故 ξ 为 S 的一个聚点。

例 7.30（利用区间套定理证明致密性定理）：

有界数列必有收敛子列。

证明　设数列 $\{x_n\}$ 是有界数列，不妨设 $\{x_n\}\subset[a,b]$，即 $[a,b]$ 中包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项。

对 $[a,b]$ 二等分，则至少有一个小区间包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记这样的小区间为 $[a_1,b_1]$，再将 $[a_1,b_1]$ 二等分，又得到包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项的小区间 $[a_2,b_2]$，无限进行下去，得一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足：

（i）$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],n=1,2,\cdots$；

（ii）$b_n-a_n\leqslant\dfrac{b-a}{2^n}\to 0(n\to\infty)$；

（iii）每个 $[a_n,b_n]$ 都包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，

由区间套定理，故存在唯一的$\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

在$[a_1,b_1]$中任取$\{x_n\}$的一项，记为x_{n_1}，由于$[a_2,b_2]$中包含$\{x_n\}$的无穷多项，因此必含有x_{n_1}以后的无穷多项，在这些项中取一项，记为x_{n_2}，继续下去，即可得$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$，其中$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，且$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k$，令$k\to\infty$得，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$。

例 7.31（用区间套定理证明连续函数根的存在性定理）：

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$。

证明 记$[a_1,b_1]=[a,b]$，则$f(a_1)f(b_1)<0$。

将$[a_1,b_1]$二等分为两个子区间，令$c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，若$f(c_1)=0$，则结论成立，否则$[a_1,c_1]$与$[c_1,b_1]$中有一个两端点的函数值异号，不妨设$f(a_1)f(c_1)<0$，记$[a_2,b_2]=[a_1,c_1]$，按此办法无限地做下去，便得到一闭区间序列$\{[a_n,b_n]\}$（$n=1,2,\cdots$），满足：

（i）$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^{n-1}}=0$；

（iii）$f(a_n)f(b_n)<0$（$n=1,2,\cdots$），

由区间套定理，存在唯一的一点$\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$，且有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

由$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，从而在ξ点连续得

$$f^2(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)f(b_n)\leqslant 0$$

故必有$f(\xi)=0$。

2．利用区间套定理证明某一区间具有某种性质

此类问题一般是证明存在某一区间具有性质 P。一般采用反证法，转化为 7.5.4 节 1.的方法。

例 7.32（利用闭区间套定理证明有限覆盖定理）：

设H为闭区间$\left[a,b\right]$的一个（无限）开覆盖，则从H中可选出有限个开区间来覆盖$\left[a,b\right]$。

证明 用反证法。假设定理的结论不成立，即不能用H中有限个开区间来覆盖$\left[a,b\right]$。

将$\left[a,b\right]$等分为两个子区间，则其中至少有一个子区间不能用H中有限个开区间来覆盖，记这个子区间为$\left[a_1,b_1\right]$，则$\left[a_1,b_1\right]\subset\left[a,b\right]$，且$b_1-a_1=\dfrac{1}{2}(b-a)$。

再将$\left[a_1,b_1\right]$等分为两个子区间，同样，其中至少有一个子区间不能用H中有限

个开区间来覆盖，记这个子区间为$\left[a_2,b_2\right]$，则$\left[a_2,b_2\right]\subset\left[a_1,b_1\right]$，且$b_2-a_2=\dfrac{1}{2^2}(b-a)$。重复上述步骤并不断地进行下去，则得到一个闭区间列$\left\{\left[a_n,b_n\right]\right\}$，它满足：

（i）$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$；

（iii）每一个$\left[a_n,b_n\right]$都不能用H中有限个开区间来覆盖，

由区间套定理，存在唯一的一点$\xi\in\left[a_n,b_n\right](n=1,2,\cdots)$，由于$H$是$[a_n,b_n]$的一个开覆盖，故存在开区间$(\alpha,\beta)\in H$，使$\xi\in(\alpha,\beta)$。于是当$n$充分大时有$[a_n,b_n]\subset\left(\alpha,\beta\right)$。

这表明$[a_n,b_n]$只须用H中的一个开区间(α,β)就能覆盖，这与挑选$[a_n,b_n]$时的假设“不能用H中有限个区间来覆盖”相矛盾，从而证得必存在属于H的有限个开区间能覆盖$[a\ ,b\ ]$。

例 7.33（用区间套定理证明）：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界。

证明　反证法。假设$f(x)$在$[a,b]$上无界。

将区间$[a,b]$二等分为两个子区间，则$f(x)$至少在一个子区间上无界，记这样的子区间为$[a_1,b_1]$；再将$[a_1,b_1]$二等分为两个子区间，则$f(x)$也至少在一个子区间上无界，记这样一个子区间为$\left[a_2,b_2\right]$。

按此办法无限地做下去，便得到一闭区间序列$\left\{\left[a_n,b_n\right]\right\}$满足：

（i）$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$；

（iii）$f(x)$在每一个$[a_n,b_n]$上都无界，

由区间套定理，存在唯一一点$\xi\in\left[a_n,b_n\right](n=1,2,\cdots)$，使

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi \tag{$*$}$$

由$\xi\in\left[a,b\right]$，$f(x)$在$[a,b]$上连续知，$f(x)$在ξ点连续，故$\exists\delta>0$，使$f(x)$在$(\xi-\delta,\xi+\delta)$内有界。又由（*）式知，对于$\delta>0,\exists N$，使得$[a_N,b_N]\subset(\xi-\delta,\xi+\delta)$，从而$f(x)$在$[a_N,b_N]$上有界。这与$f(x)$在每一个$[a_n,b_n]$上都无界矛盾。

故得证。

例 7.34　设$\{f_n(x)\}$在(a,b)内连续，若对(a,b)内每一点，数列$\{f_n(x)\}$有界，则(a,b)内必有子区间(c,d)，使$\{f_n(x)\}$在(c,d)上一致有界（即$\exists M>0,\ \forall x\in(c,d)$，都有$|f_n(x)|\leqslant M$）。

证明　反证法。假设$\{f_n(x)\}$在(a,b)的任意子区间上都不一致有界，则对$M=1,\exists x_1\in(a,b)$，有n_1使$|f_{n_1}(x_1)|>1$，由$f_{n_1}(x)$的连续性知，存在闭区间$[a_1,b_1]\subset(a,b)$，使当$x\in[a_1,b_1]$时有$|f_{n_1}(x)|>1$（不妨设$[a_1,b_1]$的长度小于(a,b)长度的一半）；

又由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a_1,b_1]$ 上不一致有界，则对 $M=2,\exists x_2\in[a_1,b_1]$，有 $n_2>n_1$ 使 $|f_{n_2}(x_2)|>2$，由 $f_{n_2}(x)$ 的连续性知，存在闭区间 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，使当 $x\in[a_2,b_2]$ 时有 $|f_{n_2}(x)|>2$；继续下去可得一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$（$n=1,2,\cdots$）满足闭区间套定理的条件，且 $|f_{n_k}(x)|>k$，故存在唯一一点 $\xi\in[a_n,b_n]$（$n=1,2,\cdots$）。由上面的做法知，$\{f_{n_k}(\xi)\}$ 为无界数列，从而 $\{f_n(\xi)\}$ 无界，与假设矛盾。

3．利用区间套定理证明极限存在问题

例 7.35 证明下列各题：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在；

（2）数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛；

（3）若 $0<a<b$，令 $a_1=a,b_1=b,a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2},n=1,2,\cdots$，则数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的极限存在且相等；

（4）若 $0<a<b$，令 $\alpha_1=a,\beta_1=b,\alpha_{n+1}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}},\beta_{n+1}=\sqrt{\alpha_n\beta_n},n=1,2,\cdots$，则数列 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 的极限存在且相等。

证明 （1）设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln(n+1)$，

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

易验证无穷闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$（$n=1,2,\cdots$）满足闭区间套定理的条件，故由区间套定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在。

（2）设

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

易验证无穷闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$（$n=1,2,\cdots$）满足闭区间套定理的条件，故由区间套定理知，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛。

（3）易验证无穷闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$（$n=1,2,\cdots$）满足闭区间套定理的条件，故由区间套定理知，数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的极限都存在。

通过在 $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 的两边取极限知，$\{a_n\},\{b_n\}$ 的极限相等。

（4）由 $0<a<b$ 知 $\alpha_1<\beta_1$，故

$$\alpha_2=\frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}>\frac{2\alpha_1\beta_1}{\beta_1+\beta_1}=\alpha_1,\quad \beta_2=\sqrt{\alpha_1\beta_1}<\sqrt{\beta_1\beta_1}=\beta_1$$

又 $\beta_2>\alpha_2$，故有 $\alpha_1<\alpha_2<\beta_2<\beta_1$；一般地有，

$$\alpha_n<\alpha_{n+1}<\beta_{n+1}<\beta_n,\ n=1,2,\cdots$$

另外
$$\beta_2-\alpha_2=\sqrt{\alpha_1\beta_1}-\frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}<\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}-\frac{2\alpha_1\beta_1}{\beta_1+\beta_1}=\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}$$

一般有
$$\beta_{n+1}-\alpha_{n+1}<\frac{\beta_1-\alpha_1}{2^n}\to 0\quad (n\to\infty)$$

故无穷闭区间列 $\{[\alpha_n,\beta_n]\}$（$n=1,2,\cdots$）满足闭区间套定理的条件，故由区间套定理知，数列 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 的极限存在且相等。

7.5.5　聚点定理的应用

1．利用聚点定理证明某个点（数）具有某种性质

证明步骤：

第一步，设想所求数为某一有界无穷数集的聚点，根据所求数附近的性质，构造有界无穷数集；

第二步，由聚点定理得到聚点；

第三步，证明此聚点就是具有某种性质的数。

例 7.36（利用聚点定理证明区间套定理）：若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，即设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 具有如下性质：

（i）$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则在实数系中存在唯一的一点 ξ，使得 $\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

证明　设数集 $S=\{a_n\}\cup\{b_n\}$，则 S 为有界无限点集，由聚点定理知，S 存在聚点 ξ。

下面证明 $\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$。即证在 ξ 的右边没有 $[a_n,b_n]$ 的左端点，在 ξ 的左边没有 $[a_n,b_n]$ 的右端点。

用反证法。

若存在某个 a_N 使 $a_N>\xi$，由 $\{a_n\}$ 单调递增知，当 $n>N$ 时 $a_n>a_N$，即在 a_N 的左边至多只有有限多个左端点，从而至多只有 S 中的有限多个点，这与 ξ 为 S 的聚点矛盾！故所有的 a_n 均有 $a_n\leqslant\xi$。

同理可证，ξ 的左边没有 $[a_n,b_n]$ 的右端点，即所有的 b_n 均有 $\xi\leqslant b_n$；从而 $\xi\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$。

最后证明 ξ 是唯一的。

假设还有另外的$\xi'\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$，则$|\xi-\xi'|\leqslant|a_n-b_n|\to 0$，故$\xi=\xi'$，从而唯一性得证。

例 7.37（利用聚点定理证明确界存在定理）：非空有上（下）界的数集，必有上（下）确界。

证明 只就非空有上界数集的情况进行证明。

设E是非空有上界的数集，设M是E的一个上界，令$S=\{x\,|\,x$是E的上界，且$x\leqslant M+1\}$。

因$[M,M+1]\subset S$，所以S是无穷数集，任取$a\in E$，则对任意$x\in S$有$a\leqslant x\leqslant M+1$，从而$S$为有界集，故由聚点定理知，数集$S$存在聚点，设为$\beta$。

下面证明$\sup E=\beta$。

（1）假设存在$x_0\in E$，使得$x_0>\beta$，取$\varepsilon_0=\dfrac{x_0-\beta}{2}$，则$x_0>\beta+\varepsilon_0$，从而$\beta+\varepsilon_0$不是$E$的上界，即$(-\infty,\beta+\varepsilon_0)\bigcap S=\varnothing$，而$(\beta-\varepsilon_0,\beta+\varepsilon_0)\bigcap S\subset(-\infty,\beta+\varepsilon_0)\bigcap S$，从而在区间$(\beta-\varepsilon_0,\beta+\varepsilon_0)$内没有数集$S$的点，这与$\beta$是数集$S$的聚点矛盾。故对任意的$x\in E$有$x\leqslant\beta$，即$\beta$是$S$的上界。

（2）假设存在$\varepsilon_0>0$，使得任意的$x\in E$有$x\leqslant\beta-\varepsilon_0$，则$\beta-\varepsilon_0$是$E$的上界。任取$0<\varepsilon<\varepsilon_0$，则$(-\infty,\beta-\varepsilon)\supset(\beta-\varepsilon_0,\beta+\varepsilon_0)$，这与$\beta$是数集$S$的聚点矛盾。故对任意的$\varepsilon>0$，存在$x_0\in E$使$x_0>\beta-\varepsilon$，即$\beta$是$S$的最小上界。

故β是S的上确界。

2．利用聚点定理证明闭区间$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$具有某种性质 P

证明步骤：

第一步，做数集$S=\{x\,|\,[a,x]$上具有性质P，$a<x\leqslant b\}$，证明S为有界无穷数集；

第二步，由聚点定理得到聚点β；

第三步，利用反证法证明$\beta=b$。

例 7.38（利用聚点定理证明有限覆盖定理）：设H为闭区间$\left[a,b\right]$的一个（无限）开覆盖，则从H中可选出有限个开区间来覆盖$\left[a,b\right]$。

证明 令$S=\{x\,|\,[a,x]$能被H有限覆盖$,a<x\leqslant b\}$，因$a\in[a,x]$，所以存在$(\alpha,\beta)\in H$，使$a\in(\alpha,\beta)$，取x_0，使$\alpha<x_0<\beta$，则对任意的x，$a<x\leqslant x_0$有$x\in S$，所以S是有界无穷数集，故由聚点定理知，数集S存在聚点，设为c。显然$c\leq b$，假设$c<b$，则由$a<c<b$，故存在$(\alpha_1,\beta_1)\in H$使$c\in(\alpha_1,\beta_1)$。取x_1,x_2使$\alpha_1<x_1<c<x_2<\beta_1$，且$x_1\in S$（因$c$是$S$的聚点，故$x_1$是可取得到的）。

因为$[a,x_1]$能被H有限覆盖，把(α_1,β_1)加入覆盖区间$[a,x_1]$的有限区间集，得到区间$[a,x_2]$也能被H有限覆盖，从而$x_2\in S$，矛盾。故得证。

7.5.6 致密性定理的应用

应用致密性定理是先从已知数列（点列）中抽出收敛子列，再由收敛子列及其

极限值的性质引出所证结论，其中抽子列的技巧应予足够重视，基本步骤是：首先给出的条件、结论，构造一个有界数列，然后利用致密性定理得一收敛子列（或此收敛子列的极限），再利用相关条件证明原问题成立。

例 7.39　应用致密性定理证明闭区间上连续函数的有界性定理。

证明　假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，即对任意的正整数 n，都存在上点 $x_n \in [a,b]$，使得 $|f(x_n)|>n$，取 $n=1,2,3,\ldots$，得到一列 $\{x_n\}$，$x_n \in [a,b]$ 并且 $|f(x_n)|>n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$。

由致密性定理知，在有界数列 $\{x_n\}$ 中可以找到一收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$，不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$。由于 $x_{n_k} \in [a,b]$，则 $x_0 \in [a,b]$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故在 x_0 点处有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

又 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$，根据函数极限与数列极限的关系可得 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

另一方面，由 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$，再由子列的性质可知 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\infty$。因此我们得到了两个互相矛盾的结果。也就是说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界的假设是与已知条件矛盾的，这就证明了定理。

例 7.40　应用致密性定理证明一致连续性定理。

证明　反证法。

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续。即 $\exists \varepsilon_0>0$，对任意的 $\delta>0$，在 $[a,b]$ 上总存在 x',x''，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|\geqslant \varepsilon_0$。

取 $\delta=1$，$\exists x_1',x_1''\in[a,b], |x_1'-x_1''|<1$，有 $|f(x_1')-f(x_1'')|\geqslant\varepsilon_0$；

取 $\delta=\dfrac{1}{2}$，$\exists x_2',x_2''\in[a,b], |x_2'-x_2''|<\dfrac{1}{2}$，有 $|f(x_2')-f(x_2'')|\geqslant\varepsilon_0$；

$$\vdots$$

取 $\delta=\dfrac{1}{n}$，$\exists x_n',x_n''\in[a,b], |x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n}$，有 $|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0$；　（*）

$$\vdots$$

故得数列 $\{x_n'\},\{x_n''\}\subset[a,b]$，由致密性定理知，存在 $\{x_n'\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}'\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}'=x_0\in[a,b]$。同时由 $|x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\dfrac{1}{n_k}$ 推出

$$|x_{n_k}''-x_0|\leqslant|x_{n_k}'-x_{n_k}''|+|x_{n_k}'-x_0|\to 0 \quad (k\to\infty)$$

又得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}''=x_0$。由（*）式有

$$|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geqslant\varepsilon_0$$

在上式中令 $k\to\infty$，由 $f(x)$ 的连续性及数列极限的保不等式性，得到

$$0=|f(x_0)-f(x_0)|=\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geqslant\varepsilon_0$$

这与 $\varepsilon_0 > 0$ 矛盾。

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

例 7.41 利用致密性定理证明有限覆盖定理。

证明 设 H 为 $[a,b]$ 的一个开覆盖，假设 H 不存在有限子覆盖，则对 $[a,b]$ 二等分做区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，使得每个 $[a_n,b_n]$ 都不存在有限子覆盖。

根据闭区间套的做法知，$\{b_n\}$ 为有界数列，故由致密性定理知，存在 $\{b_n\}$ 的子数列 $\{b_{n_k}\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = \xi$，由 $\lim\limits_{k\to\infty}(b_{n_k} - a_{n_k}) = 0$ 知 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$，显然 $\xi \in [a,b]$。

由 $[a,b]$ 被 H 覆盖知，存在开区间 $(\alpha,\beta) \in H$，使 $\xi \in (\alpha,\beta)$，由 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = \xi$ 知，存在充分大的 K 使得 $[a_{n_K}, b_{n_K}] \subset (\alpha,\beta)$，这与 $[a_{n_K}, b_{n_K}]$ 不能被 H 有限覆盖矛盾。

从而得证。

例 7.42 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，若 $x_n \subset [a,b]$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，证明 $\exists x_0 \in [a,b]$ 使 $f(x_0) = A$。

证明 因 $x_n \subset [a,b]$，所以 $\{x_n\}$ 为有界数列，由致密性定理知，存在一收敛子列，设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$，则 $x_0 \in [a,b]$。

由 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续得

$$f(x_0) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

例 7.43 设 $\{x_n\}$ 为有界发散数列，则必存在两个子列 $x_{n_k}^{(1)} \to a\ (k \to +\infty)$，$x_{n_k}^{(2)} \to b\ (k \to +\infty)$，$a,b$ 为不相等的有限数。

证明 因 $\{x_n\}$ 有界，由致密性定理知，存在一收敛子列 $x_{n_k}^{(1)} \to a\ (k \to +\infty)$，又由 $\{x_n\}$ 有界知，$\exists \alpha,\beta$ 使 $\alpha \leqslant x_n \leqslant \beta$。$\forall \varepsilon > 0$ 且 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (\alpha,\beta)$，则在 $[a, a-\varepsilon], [a+\varepsilon, b]$ 中至少有一个含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项（否则与 $\{x_n\}$ 发散矛盾），所以在 $[a, a-\varepsilon], [a+\varepsilon, b]$ 中至少有一个含有 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $x_{n_k}^{(2)}$，设其收敛到 b，显然 $a \neq b$（否则与 $\{x_n\}$ 收敛到 a 矛盾）。故得证。

7.5.7 有限覆盖定理的应用

1．利用有限覆盖定理证明 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 具有性质 P

证明步骤：

第一步，证明对于闭区间 $[a,b]$ 中的每一个点 x，都有一个邻域 $(x-\delta_x, x+\delta_x)$，此邻域具有性质 P，所有这样的邻域构成了一个开区间集 H，覆盖 $[a,b]$；

第二步，根据有限覆盖定理，可以从 H 中选出有限个开区间 $(x_1-\delta_1, x_1+\delta_1)$，$(x_2-\delta_2, x_2+\delta_2)$，…，$(x_k-\delta_k, x_k+\delta_k)$ 覆盖 $[a,b]$；

第三步，利用 $(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)\ (i=1,2,\cdots,k)$ 具有性质 P，证明闭区间 $[a,b]$ 具有性质 P。

例 7.44　用有限覆盖定理证明闭区间上连续函数的有界性定理。

证明　由连续函数的局部有界性知，$\forall x'\in[a,b],\exists U(x',\delta_{x'}),\exists M_{x'}>0$ 使得当 $x\in U(x',\delta_{x'})\bigcap[a,b]$ 时有 $|f(x)|\leqslant M_{x'}$.

当 x' 取遍 $[a,b]$，就得到开区间集 $H=\{U(x',\delta_{x'})\,|\,x'\in[a,b]\}$，显然 H 是闭区间 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖。

由有限覆盖定理得，存在 H 的一个有限子集 $H^*=\{U(x_i,\delta_i)\,|\,x_i\in[a,b]，i=1,2,\cdots,k\}$ 覆盖了闭区间 $[a,b]$，且存在正数 $M_1,M_2,\cdots,M_k$，使得 $\forall x\in U(x_i,\delta_i)\bigcap[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant M_i,i=1,2,\cdots,k$ 。

令 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}M_i$，则 $\forall x\in[a,b]$，x 必属于某个 $U(x_i,\delta_i)$，从而有 $|f(x)|\leqslant M_i\leqslant M$ 。

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

例 7.45　应用有限覆盖定理证明闭区间上连续函数的一致连续性定理。

证明　由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知，$\forall\varepsilon>0$，对每一点 $x\in[a,b]$ 都存在 $\delta_x>0$，使得当 $x'\in U(x,\delta_x)$ 时有

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad ①$$

当 x 取遍 $[a,b]$，得一无限开区间集 $H=\left\{U\left(x,\dfrac{\delta_x}{2}\right)\Big|x\in[a,b]\right\}$ 覆盖了闭区间 $[a,b]$，由有限覆盖定理得，存在 H 的一个有限子集 $H^*=\left\{U\left(x_i,\dfrac{\delta_i}{2}\right)\Big|x_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,k\right\}$ 覆盖了 $[a,b]$，记 $\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\left\{\dfrac{\delta_i}{2}\right\}>0$，对任何 $x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta$，$x'$ 必属于 H^* 中的某个开区间，设 $x'\in U\left(x_i,\dfrac{\delta_i}{2}\right)$，即 $|x'-x_i|<\dfrac{\delta_i}{2}$，此时有

$$|x''-x'|\leqslant|x''-x'|+|x'-x_i|<\delta+\frac{\delta_i}{2}\leqslant\frac{\delta_i}{2}+\frac{\delta_i}{2}=\delta_i$$

故由式①同时得到

$|f(x')-f(x_i)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 和 $|f(x'')-f(x_i)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，由此得到 $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$，由一致连续的定义知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

2．利用有限覆盖定理证明存在某一个点具有性质 P

往往采用反证法，将此类问题转化为上述 1.所述问题。

例 7.46　利用有限覆盖定理证明单调有界定理。

证明　不妨设数列 $\{x_n\}$ 递增有界，且 $a\leqslant x_n\leqslant b$，假设 $\{x_n\}$ 的极限不存在，所以 $\forall x_0\in[a,b]$，x_0 都不是 $\{x_n\}$ 的极限，则 $\exists\varepsilon_0>0,\forall N,n>N,|x_n-x_0|\geqslant\varepsilon_0$，则存在 x_0 的某邻域 $U\left(x_0,\dfrac{\varepsilon_0}{2}\right)$ 中只含有 $\{x_n\}$ 的有限项。

令 $H=\left\{U\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)\mid x\in[a,b]\right\}$，则 H 是闭区间 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖，由有限覆盖定理知，必存在有限子覆盖。不妨设存在 $U\left(x_1,\frac{\varepsilon_1}{2}\right),U\left(x_2,\frac{\varepsilon_2}{2}\right),\cdots,U\left(x_k,\frac{\varepsilon_k}{2}\right)$ 是 $[a,b]$ 的一个有限开覆盖，即 $\bigcup_{i=1}^{k}U\left(x_i,\frac{\varepsilon_i}{2}\right)\supset[a,b]$，

而每个 $U\left(x_i,\frac{\varepsilon_i}{2}\right)(i=1,2,\cdots,k)$ 只含有限个点，从而它们的并也只含有限个点，从而得出 $[a,b]$ 也只含有限个点，这与 $[a,b]$ 是无限点集矛盾，故得证。

例 7.47 用有限覆盖定理证明聚点定理。

证明 设 S 为实数集上的有界无限点集，不妨设 $S\subset[-M,M]$，若 S 有聚点，则聚点必属于 $[-M,M]$。

假设 $[-M,M]$ 中的任何点都不是 S 的聚点，从而 $\forall x\in[-M,M]$，存在 $\delta_x>0$，使得 $(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 内至多含有 S 的有限多个点。

当 x 取遍 $[-M,M]$ 上的所有点时，就得到一无限开区间集 $H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[-M,M]\}$ 覆盖了闭区间 $[-M,M]$，由有限覆盖定理，存在有限个开区间 $H^*=\{(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\mid i=1,2,\cdots,k\}$ 覆盖 $[-M,M]$。由每个 $(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 内至多含有 S 的有限多个点，知 H^* 内至多含有 S 的有限多个点，这与 H^* 覆盖了全部 S 中的无限多个点矛盾。

所以 S 至少存在一个聚点。

参 考 文 献

[1] 常友润．关于实数连续性的几个定理．延安教育学院学报，1995，(2)．

[2] 闫慧凰，赵巨涛．关于实数连续性的几个问题（一）．晋东南师范专科学校学报，2003，(5)．

[3] 范慧萍，闫慧凰．关于实数连续性的几个问题（二）．晋东南师范专科学校学报，2003，(5)．

[4] 张鹏，朱俊恭．关于实数连续性定理的一点注记．遵义师范学院学报，2004，(3)．

[5] 曾利江．实数连续性几个定理条件的讨论．湖南科技学院学报，2008，(4)．

[6] 包丙寅．实数基本定理的等价性证明．赤峰学院学报：自然科学版，2010，(7)．

[7] 王敏生．实数连续性的 16 个等价命题．安徽师范大学学报：自然科学版，2012，(3)．

[8] 刘士强．实数连续性的等价命题．宁夏大学学报，1985，(1)．

[9] 周正中．实数连续性的等价命题．广西师范大学学报：自然科学版，1983，(1)．

[10] 周正中．实数连续性的等价命题（续）．广西师范大学学报：自然科学版，1983，(2)．

[11] 李莲洁．实数连续性等价命题的证明及应用．淮北煤师院学报，2002，(6)．

[12] 刘锐，李正兴，杨莲卫．实数连续性定理的证题规律．宁夏大学学报：自然科学版，1991，(4)．

[13] 罗敬，段汕．实数连续性九个等价命题的证明．武汉纺织大学学报，2012，(6)．

［14］孙书荣．实数完备性基本定理的相互证明．济南大学学报，1995，（5）．
［15］王美丽，李磊．实数完备性六个等价命题的推广．南阳师范学院学报，2009，（12）．
［16］王秀兰，仲崇斌，潘万富．从确界原理出发讨论函数的连续性．高师理科学刊，2007，（2）．
［17］许祥鸿．用单调有界原理证明几个分析定理．无锡教育学院学报，1998．
［18］高巧琴．单调有界定理的研究性教学．吕梁学院学报，2013，（4）．
［19］魏静．区间套定理的推广和应用技巧．喀什师范学院学报，2008，（5）．
［20］刘俊杰．区间套定理在求极限上的应用．牡丹江师范学院学报，1999，（1）．
［21］毛一波．闭区间套定理的推广．渝西学院学报：自然科学版，2005，（6）．
［22］常进荣，王林．闭区间套定理的推广及应用．石家庄职业技术学院学报，2003．（12）．
［23］张颖．用闭区间套定理证明实数完备性中其余五个等价命题．吕梁学院学报，2011，（4）．
［24］陈朝舜，李远东．聚点定理及其应用规律．重庆工商大学学报：自然科学版，2004，（4）．
［25］王安斌，宾红华．用柯西准则证明几个相关命题．数学理论与应用，2004，（12）．
［26］彭培让．致密性定理证明其他实数连续性基本定理．河南教育学院学报：自然科学版，2009，（9）．
［27］李琦．Heine−Borel 有限覆盖定理的一个证明．嘉应大学学报：自然科学，1998，（6）．
［28］王全来，曹术存．波莱尔有限覆盖思想研究．曲阜师范大学学报，2009，（1）．
［29］慕建英，王建华．对有限覆盖定理的一个补充．吕梁学院学报，2013，（4）．
［30］吴鸿儒，徐宪民．关于满覆盖．浙江师范大学学报：自然科学版，1989，（11）．
［31］关金玉，徐永春．二维空间完备性基本定理的相互证明．河北北方学院学报：自然科学版，2007，（8）．
［32］曲立学．覆盖定理的若干简单应用．齐齐哈尔师范学院学报：自然科学版，1991，（9）．
［33］薛怀玉．较弱条件下的有限覆盖定理．咸阳师专学报，1998，（3）．

总参考文献

说明：因本书的参考文献较多，下面列出主要参考文献目录，各章的参考文献已在每章的后面列出。

［1］[俄] A.D.亚历山大洛夫．数学：它的内容、方法和意义．王元，万哲先，译．北京：科学出版社，2001．

［2］[美] 乔治·波利亚．数学的发现．刘景麟，曹之江，邹清莲，译．北京：科学出版社，2006．

［3］[美] 乔治·波利亚．数学与猜想．李心灿，王日爽，李志尧，译．北京：科学出版社，1984．

［4］[美] 乔治·波利亚．怎样解题．涂泓，冯承天，译．上海：上海科技教育出版社，2011．

［5］[美] M．克莱因．古今数学思想．朱学贤，申又枨，叶其孝，译．上海：上海科学技术出版社，1979．

［6］[美] R．柯朗，H．罗宾．数学是什么．左平，张饴慈，译．北京：科学出版社，1985．

［7］[美] T·帕帕斯．数学趣闻集锦．张远南，张昶，译．上海：上海教育出版社，1998．

［8］[美] H·伊夫斯．数学史上的里程碑．欧阳绛，戴中器，译．北京：北京科技出版社，1990．

［9］[英] 牛顿．自然哲学之数学原理．王克迪，译．西安：陕西人民出版社，2000．

［10］[美] 卡尔·B·波耶．微积分概念史．上海师范大学数学系翻译组，译．上海：上海人民出版社，1977．

［11］[美] 卡尔·B·波耶．微积分概念发展史．唐生，译．上海：复旦大学出版社，2007．

［12］[俄] Γ.M.菲赫金哥尔茨．微积分学教程．杨弢亮，叶彦谦，译．高等教育出版社，2005．

［13］[美] C·亚当斯，J·哈斯，A·汤普森．微积分之屠龙宝刀．张菽，译．长沙：湖南科学技术出版社，2005．

［14］[美] C·亚当斯，J·哈斯，A·汤普森．微积分之倚天宝剑．张菽，译．长沙：湖南科学技术出版社，2010．

［15］[日] 米山国藏．数学的精神、思想和方法．毛正中，吴素华，译．成都：四川教育出版社，1986．

［16］[日] 掘场芳数．e 的奥秘．丁树深，译．北京：科学出版社，1998．

［17］[荷兰] 弗赖登塔尔．作为教育任务的数学．昌平，唐瑞芬，译．上海：上海教育出版社，1995．

［18］[荷兰] 弗赖登塔尔．数学教育再探．刘意竹，译．上海：上海教育出版社，1999．

［19］徐利治．数学方法论选讲．武汉：华中科技大学出版社，2000．

［20］郑毓信．数学方法论．南宁：广西教育出版社，1991．

［21］王鸿钧，孙宏安．中国古代数学思想方法．南京：江苏教育出版社，1989．

［22］解思泽．徐本顺．世界数学家思想与方法．济南：山东教育出版社，1993．

［23］解思泽，赵树智．数学思想方法纵横论．北京：科学出版社，1987．

［24］王树禾．数学思想史．北京：国防工业出版社，2003．

［25］王梓坤．科学发现纵横谈．北京：中国少年儿童出版社，2005．

［26］华东师范大学数学系．数学分析（第 4 版）．北京：高等教育出版社，2010．

［27］强文久，李元章，黄雯荣．数学分析的基本概念与方法．北京：高等教育出版社，1989．

[28] 裴礼文，数学分析的典型问题与方法．北京：高教出版社，1993．
[29] 孙本旺，汪浩．数学分析中的典型例题和解题方法．长沙：湖南科学技术出版社，1981．
[30] 钱吉林．数学分析题解精粹（第 2 版）．长沙：湖北辞书出版社，2009．
[31] 汪林，等．数学分析问题研究与评注．北京：科学出版社，1995．
[32] 赵显曾，黄安才．数学分析的方法与题解．西安：陕西师范大学出版社，2005．
[33] 周民强．数学分析习题演练．北京：科学出版社，2008．
[34] 朱时．数学分析札记．贵阳：贵州教育出版社，1994．
[35] 明清河．数学分析的思想与方法．济南：山东大学出版社，2004．
[36] 杨艳萍，杨耕文．微积分的思想方法溯源．济南：山东大学出版社，2010．
[37] 杨艳萍，明清河．数学发现的思想与方法．济南：山东教育出版社，2007．
[38] 陈仁政．不可思议的 e．北京：科学出版社，2005．
[39] 王树禾．数学演义．北京：科学出版社，2004．
[40] 李文林，任辛喜．数学的力量：漫话数学的价值．北京：科学出版社，2007．
[41] 李文林．数学珍宝——历史文献精选．北京：科学出版社，1998．
[42] 吴文俊．世界著名数学家传记．北京：科学出版社，2003．
[43] 李学数．数学和数学家的故事．北京：新华出版社，1999．
[44] 张奠宙．20 世纪数学经纬．上海：华东师范大学出版社，2002．
[45] 张奠宙．数学史选讲．上海：上海科学技术出版社，1997．
[46] 杜瑞芝．简明数学史辞典．济南：山东教育出版社，1991．
[47] 张素亮．数学史简编．呼和浩特：内蒙古大学出版社，1990．
[48] 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．
[49] 孙兴运．数学符号史话．济南：山东教育出版社，1998．
[50] 龚升，林立军．简明微积分发展史．长沙：湖南教育出版社，2005．
[51] 朱家生，姚林．数学：它的起源与方法．南京：东南大学出版社，1999．
[52] 张燕顺．数学的源与流．北京：高等教育出版社，2003．
[53] 张景中．数学与哲学．北京：中国少年儿童出版社，2003．
[54] 周述歧．数学思想与数学哲学．北京：中国人民大学出版社，1993．
[55] 张文彦．自然辩证法概要．北京：科学技术文献出版社，1988．
[56] 易南轩．数学美拾趣．北京：科学出版社，2008．
[57] 崔宝同，王海滨．数学分析的理论与方法．科学技术文献出版社，1990.10．
[58] 马顺业．数学分析研究．山东大学出版社，1996.9．
[59] 吴良森，等．数学分析习题精解．科学出版社，2002.2．
[60] 刘立山，孙钦福．数学分析的基本理论与典型方法．中国科学技术出版社，2005.6．
[61] 许绍溥．数学分析教程．南京大学出版社，1992.9．
[62] 梁宗巨．数学家传略辞典．济南：山东教育出版社，1989．
[63] 李心灿．微积分的创立者及其先驱．北京：高等教育出版社，2007．
[64] 龚昇．对微积分中主要矛盾的粗浅认识．高等数学研究，1999.3．
[65] 龚昇．对微积分中主要矛盾的粗浅认识（续一）．高等数学研究，1999.4．
[66] 龚昇．对微积分中主要矛盾的粗浅认识（续二）．高等数学研究，2000.3．
[67] 龚昇．对微积分中主要矛盾的粗浅认识（续三）．高等数学研究，2000.6．
[68] 张国定．数学史融入数学教学的实践研究．西北师范大学教育硕士学位论文，2007.11．

[69] 李莉．学生学习数学概念的层次分析．数学教育学报，2002.8．
[70] 王文霞．从数学概念的特征谈数学概念的教学．山西大学师范学院学报，2001.1．
[71] 毛京中．高等数学概念教学的一些思考．数学教育学院学报，2003.5．
[72] 李桂林．试谈微分学的揭秘问题．自然辩证法研究，2005.1．
[73] 樊守芳．数学分析概念教学初探．井冈山师范学院学报：自然科学，2003，(6)．
[74] 洪方权．“数学分析”的难点教学．数学教育学报，1997，6 (4)：72．
[75] 李惠敏．微积分的发生与发展．长春师院学报：自然科学版，1997，(2)．
[76] 沈长华．微积分概念的发展及其哲学解析．苏州大学高校教师申请硕士学位论文，2007.10．
[77] 傅海伦，卞宪贞．中西早期微积分思想及其比较．曲阜师范大学学报，2001.4．
[78] 徐永琳．在微积分中开展探究性学习的现状及其对策研究．天津师范大学硕士学位论文，2008，(4)．
[79] 杨艳萍．微积分辨证思想探析．曲阜师范大学学报，2006，(4)．
[80] 杨艳萍．关于开展数学分支学科思想方法研究的若干思考．洛阳大学学报，2006，(12)．
[81] 杨艳萍．微积分中的局部与整体思想分析．洛阳大学学报，2005，(2)．
[82] 杨艳萍．数学教学过程中应重视的几个问题．洛阳大学学报，2000，(4)．
[83] 明清河．例谈微积分中的构造思想与方法．洛阳大学学报，2007.10，22 (4)：105-108．
[84] 明清河．论微积分中的辨证思想．枣庄师专学报，1998，(2)．
[85] 明清河．试论古代数学家刘徽及其数学思想．山东教育学院学报，2004，(4)，104：73-74．
[86] 谭伟明．高等数学中几个重要概念所蕴涵的数学思想方法分析．广西高教研究，2001，(6)：41-43．
[87] 黄灿，骆洪才．论数学概念的认知．湘潭师范学院学报：自然科学版，2001，(12)．
[88] 罗新兵，罗增儒．数学概念表征的初步研究．数学教育学报，2003.12 (2)：21-23．
[89] 徐伟，孙承毅．数学概念的理解问题．鞍山师范学院学报，2003，(12)．
[90] 谭奕．数学概念教学．数学教育学报，1995，(8)．
[91] 孙杰远，王兄．数学概念学习的研究评析．广西师范大学学报：哲学社会科学版，2002，(10)．
[92] 周友士．基于建构主义的数学概念转变学习．数学教育学报，2004，(8)．
[93] 李善良．数学概念学习研究综述．数学教育学报，2001，(8)．